

Wyliczanie wartości na arkuszu z określoną dokładnością

Metody numeryczne polegają na uzyskaniu wyniku poprzez sekwencję kolejnych przybliżeń. W efekcie otrzymany wynik cechuje się prawie zawsze pewnym błędem, chociaż może być on bardzo mały. Wyliczyć w ten sposób można pole powierzchni, długość krzywej itp. albo też znaleźć punkty przecięcia krzywych, miejsca zerowe itp. z określoną dokładnością oczywiście.

Długość krzywej czy też pole powierzchni policzymy dokładniej, jeśli zwiększymy ilość przedziałów. Na poprzedniej lekcji o całkowaniu skok był prawie zawsze równy 0,1 lub 1. Nic nie stoi na przeszkodzie, aby zmniejszyć go do np. 0,001, co przy zakresie -10..10 da 20000 komórek do zsumowania (arkusz ma 65000 wierszy). Używając tylko komórek trudno by było zwiększyć dokładność jeszcze bardziej - i do całkowania z dużymi dokładnościami trzeba zastosować programowanie.

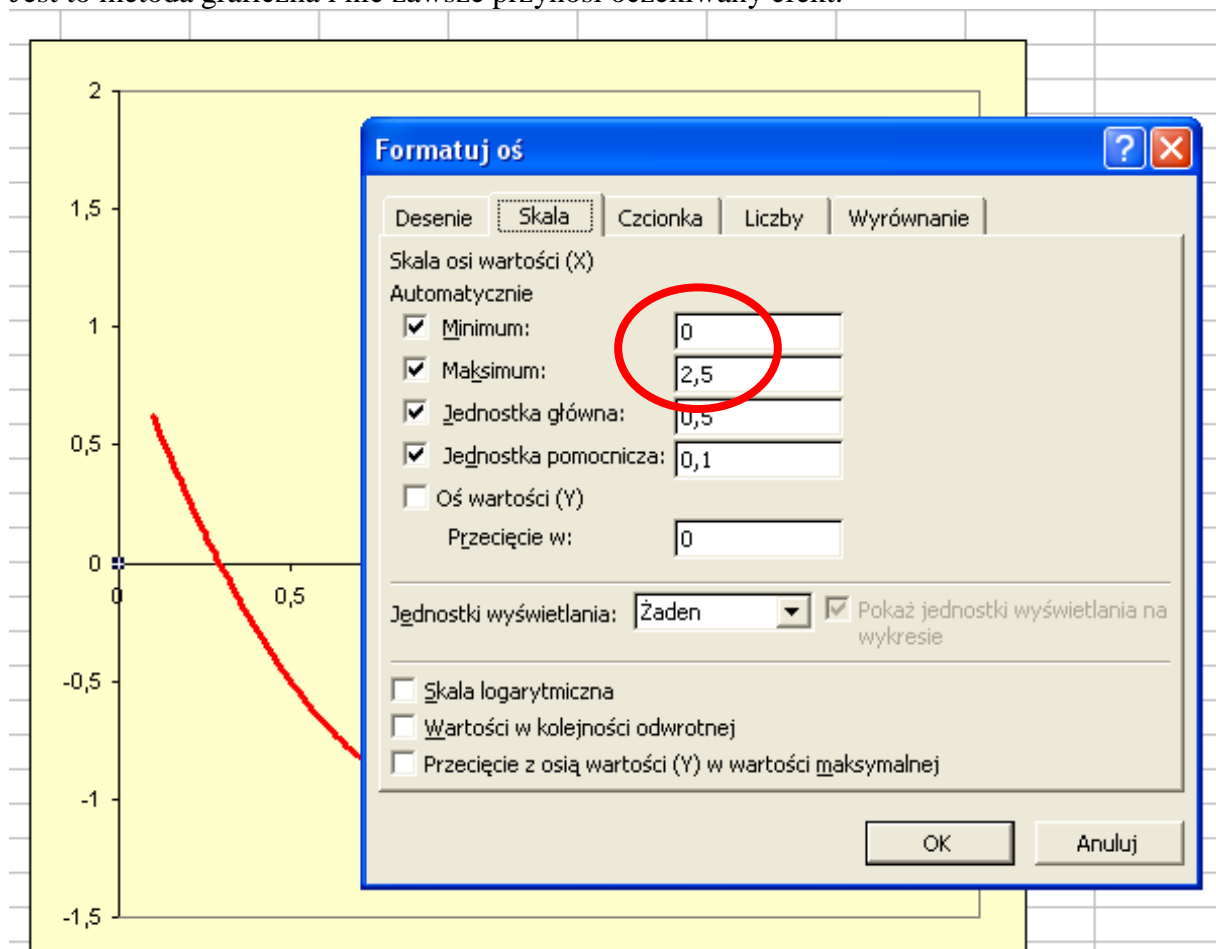
Charakterystyczne punkty na krzywej policzymy jednak z dużo wyższą dokładnością za pomocą bardzo prostych technik kolejnego zmniejszania zakresu. Oczywiście dla prostych funkcji mamy gotowe wzory na wyliczenie tych punktów - nas będą interesowały techniki uniwersalne.

SPOSÓB 1 - metoda graficzna

Wybieramy opcję FORMATUJ OŚ i na zakładce SKALA wykonujemy kolejne przybliżenia (MINIMUM i MAKSIMUM) szukanego punktu. Raz na osi X i raz na osi Y.

Za każdym razem po zmianie wartości minimum i maksimum sprawdzamy, czy wykres nadal przecina oś OX (jeśli szukamy miejsc zerowych).

Jest to metoda graficzna i nie zawsze przynosi oczekiwany efekt.



SPOSÓB 2 - metoda numeryczna

Zasada obliczania punktów przecięcia z osią X

1. Wykonujemy podobny schemat obliczeń na arkuszu, jak podczas rysowania wykresu
2. Odszukamy miejsce (dwa punkty) w kolumnie Y, w których następuje zmiana znaku (przejście przez oś X - miejsce zerowe)
3. Wybieramy mniejszą wartość X odpowiadającą jednemu ze znalezionych Y. Ten punkt staje się początkiem obliczeń z mniejszą wartością skoku.
4. Zmniejszamy skok np. 10 razy
5. Powtarzamy punkty 2, 3 i 4, aż uzyskamy wynik z określoną dokładnością skoku

Na rysunku skok na osi X wynosi początkowo 0,1 (**lewa tabelka**)

Zmiana znaku na osi Y następuje pomiędzy 0,2 i 0,3 na osi X

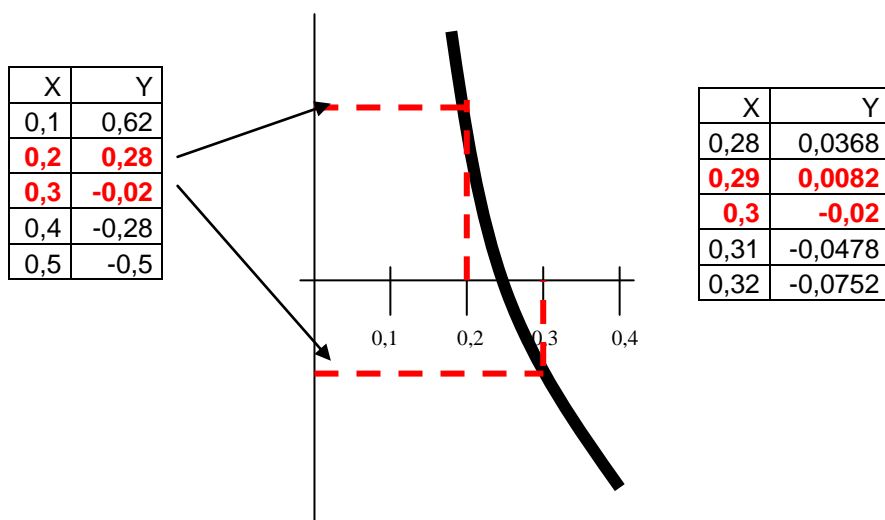
Początek nowego zakresu - 0,2 i nowy skok 0,01

Odszukujemy nowe miejsce zmiany znaku (**prawa tabelka**) - pomiędzy 0,29 a 0,3 na osi X

Początek nowego zakresu 0,29, skok 0,001

I powtarzamy cykl od nowa aż uzyskamy określoną dokładność

Opis postępowania dla funkcji kwadratowej o współczynnikach: A=2, B=-4, C=1



ZADANIE

Znajdź punkty przecięcia funkcji $y=2x^2-4x+1$ z osią X (miejsca zerowe) z dokładnością 0,00001

Rozwiązaniem są dwa punkty na osi X: 0,29289 i 1,70711. Aby uzyskać dokładny wynik należy wyliczyć z dokładnością większą niż w zadaniu a następnie zaokrąglić.

Fragment arkusza oraz poszczególne etapy przybliżeń pokazują poniższe rysunki.

	A	B	C	D
1			X	Y
2	pocz	-10	=B2	=B\$4*C2^2+B\$5*C2+B\$6
3	skok	0,1	=C2+B\$3	=B\$4*C3^2+B\$5*C3+B\$6
4	a	2	=C3+B\$3	=B\$4*C4^2+B\$5*C4+B\$6
5	b	-4	=C4+B\$3	=B\$4*C5^2+B\$5*C5+B\$6
6	c	1	=C5+B\$3	=B\$4*C6^2+B\$5*C6+B\$6
7			=C6+B\$3	=B\$4*C7^2+B\$5*C7+B\$6

początek: -10, skok: 0,1

0,1	0,62
0,2	0,28
0,3	-0,02
0,4	-0,28
0,5	-0,5

początek: 0,2, skok: 0,01

0,27	0,0658
0,28	0,0368
0,29	0,0082
0,3	-0,02
0,31	-0,0478
0,32	-0,0752

początek: 0,29, skok: 0,001

0,291	0,00536
0,292	0,00253
0,293	-0,0003
0,294	-0,00313
0,295	-0,00595

początek: 0,292, skok: 0,0001

0,2927	0,00054658
0,2928	0,00026368
0,2929	-1,918E-05
0,293	-0,000302
0,2931	-0,00058478

początek: 0,2928, skok: 0,00001

0,29288	3,73888E-05
0,29289	9,1042E-06
0,2929	-1,918E-05
0,29291	-4,74638E-05
0,29292	-7,57472E-05

początek: 0,29289, skok: 0,000001

0,292892	3,44733E-06
0,292893	6,18898E-07
0,292894	-2,20953E-06
0,292895	-5,03795E-06
0,292896	-7,86637E-06

W ten sposób można by przybliżać aż do momentu wyczerpania możliwości arkusza kalkulacyjnego. Skoro jednak zadanie polegało na znalezieniu przybliżonego rozwiązania z dokładnością do 0,00001 więc wynik **0,29289** na osi X i ZERO na osi Y jest pierwszym punktem zerowym na tej krzywej

Szukanie drugiego punktu

Wstawiamy jak na początku -10 i 0,1 do arkusza i szukamy drugiego punktu przecięcia. Tym razem szukamy przejścia z wartości ujemnych na dodatnie. Rozwiązaniem jest punkt: 1,707106, a po zaokrągleniu: 1,70711

Punkt przecięcia się dwóch krzywych

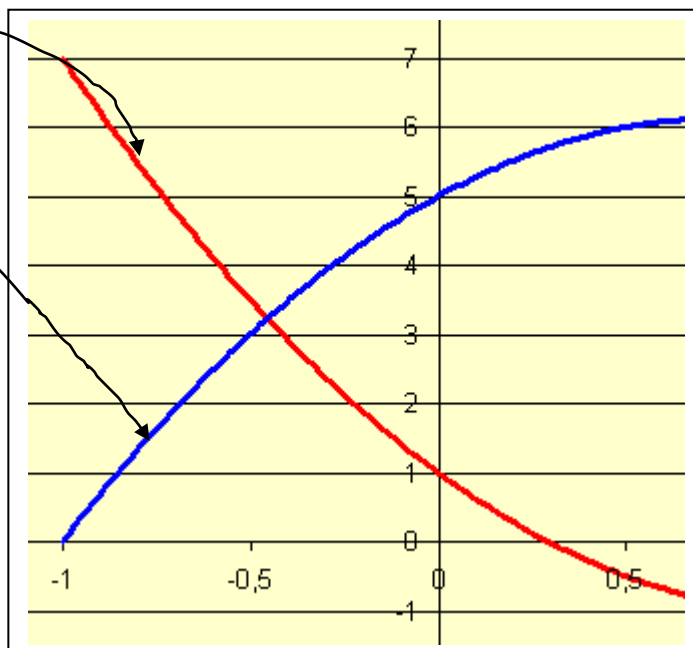
Szukamy podobną metodą kolejnego przybliżania. Szukanie miejsc zerowych było ułatwione, bo wystarczyło znaleźć miejsce zmiany znaku. Punkt przecięcia dwóch krzywych charakteryzują zbliżone wartości współrzędnych X i Y dla obu krzywych.

Zadanie

Znajdź punkty przecięcia funkcji $y_1=2x^2-4x+1$ i $y_2=-2x^2+3x+5$ z dokładnością 0,00001

Obie funkcje mają dwa punkty przecięcia. Miejsce początku kolejnego przybliżenia pierwszego z nich zaznaczono czerwonym kolorem. Jak je znaleźć? Wszystkie wartości funkcji Y1 powyżej czerwonej wartości są **większe** od wartości funkcji Y2, a poniżej czerwonego punktu mają wartości **mniejsze** od wartości funkcji Y2. Kolejnym początkiem stanie się wartość X: -0,46 a skok 0,01 itd.

X	Y1	Y2
-0,48	3,3808	3,0992
-0,47	3,3218	3,1482
-0,46	3,2632	3,1968
-0,45	3,205	3,245
-0,44	3,1472	3,2928
-0,43	3,0898	3,3402
-0,42	3,0328	3,3872



A oto fragmenty tabel z kolejnymi przybliżeniami dla pierwszego punktu

początek: -10, skok: 0,1

-0,7	4,78	1,92
-0,6	4,12	2,48
-0,5	3,5	3
-0,4	2,92	3,48
-0,3	2,38	3,92
-0,2	1,88	4,32

początek: -0,5, skok: 0,01

-0,48	3,3808	3,0992
-0,47	3,3218	3,1482
-0,46	3,2632	3,1968
-0,45	3,205	3,245
-0,44	3,1472	3,2928
-0,43	3,0898	3,3402

początek: -0,46, skok: 0,001

-0,456	3,239872	3,216128
-0,455	3,23405	3,22095
-0,454	3,228232	3,225768
-0,453	3,222418	3,230582
-0,452	3,216608	3,235392
-0,451	3,210802	3,240198

początek: -0,454, skok: 0,0001

-0,454	3,228232	3,225768
-0,4539	3,22765042	3,22624958
-0,4538	3,22706888	3,22673112
-0,4537	3,22648738	3,22721262
-0,4536	3,22590592	3,22769408
-0,4535	3,2253245	3,2281755

początek: -0,4538, skok: 0,00001

-0,45379	3,227010728	3,226779272
-0,45378	3,226952577	3,226827423
-0,45377	3,226894426	3,226875574
-0,45376	3,226836275	3,226923725
-0,45375	3,226778125	3,226971875
-0,45374	3,226719975	3,227020025

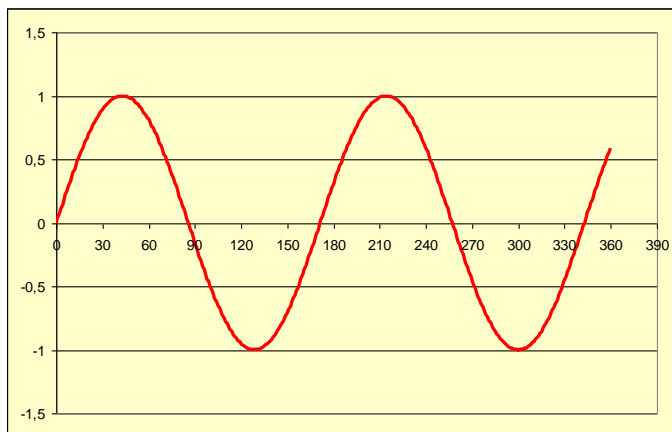
początek: -0,45377, skok: 0,000001

-0,45377	3,226894426	3,226875574
-0,453769	3,226888611	3,226880389
-0,453768	3,226882796	3,226885204
-0,453767	3,226876981	3,226890019
-0,453766	3,226871166	3,226894834

I to by mogło wystarczyć. Pierwszy punkt przecięcia po zaokrągleniu [-0,45377; 3,22688]
 Drugi punkt przecięcia ma współrzędne [2,20377; 1,89812]

ĆWICZENIE

Znajdź miejsca zerowe funkcji $y=\sin(2,1x)$ w przedziale $\langle 0..360 \rangle$ stopni z dokładnością do 0,00001. Punkt początkowy nie bierzemy pod uwagę.



Znajdź punkty przecięcia funkcji $y_1=\sin(2,1x)$ i funkcji $y_2=-0,0001x+0,2$ w przedziale $\langle 0..360 \rangle$ stopni z dokładnością do 0,00001.

