

Arkusz 8 – Całkowanie - Komputerowe wspomaganie pomiarów (17)

Teoria

Po co nam potrzebna długość krzywej na wykresie albo też pole powierzchni pod tą krzywą?

Tego typu obliczenia są niezbędne. Oto garść przykładów:

- jakie jest ugięcie belki pod obciążeniem (czy dach się zawali)
- jakie ciśnienie panuje u podstawy zbiornika z wodą (czy go rozsadzi)
- jaka siła odśrodkowa działa na przedmiot w ruchu po okręgu (czy płyta CD w stacji się rozleci)
- ile się wydłuży linia wysokiego napięcia pod własnym ciężarem (czy porazi przewodniów)
- ile elektryczności przepłynie przez kondensator gdy zmieni się natężenie (czy nastąpi przebicie i posypią się iskry)
- jaką pracę wykonamy rozprężając gaz (czy lodówka będzie mrozić)
- jak długo będzie wyciekała woda z basenu przez otwór (ile czasu potrzeba na opróżnienie zbiorników wody w czasie powodzi)
- jaki będzie kapitał końcowy lokaty pieniężnej w banku przy określonym oprocentowaniu i kapitalizacji
- ile przechowywać zapasów służące do produkcji np. pieczywa w piekarni, aby koszty przechowywania były jak najmniejsze
- ile paliwa musi spalać w każdej sekundzie rakieta, aby można było wynieść na orbitę okołozemską satelitę itd.

Praktyka

Dzielimy krzywą na mniejsze fragmenty i przyjmujemy, że są odcinkami.

Długość takiego odcinka liczymy za pomocą tw. Pitagorasa.

Powierzchnia pod takim odcinkiem jest trapezem, albo jeszcze łatwiej – prostokątem.

Zadanie

Pewien piechur szedł do schroniska krętą drogą pokazaną na obrazku.

Drogę piechura można opisać wzorem matematycznym: $y=2\cdot\sin(x)+2$, gdzie X i Y oznaczają współrzędne w kilometrach. Oblicz drogę przebytą przez piechura.

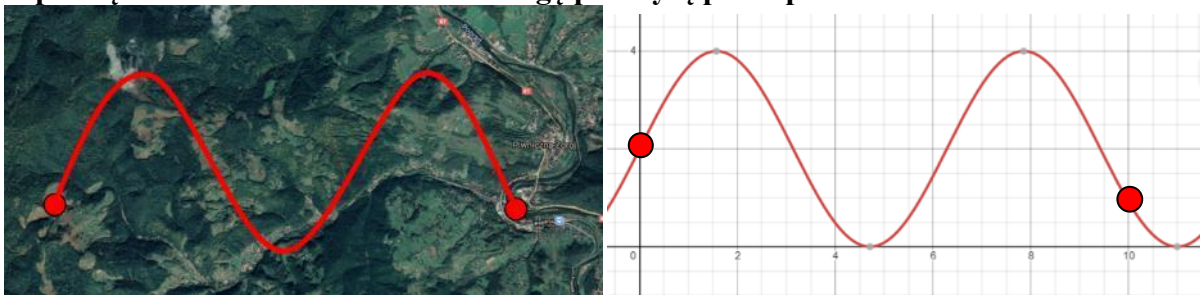


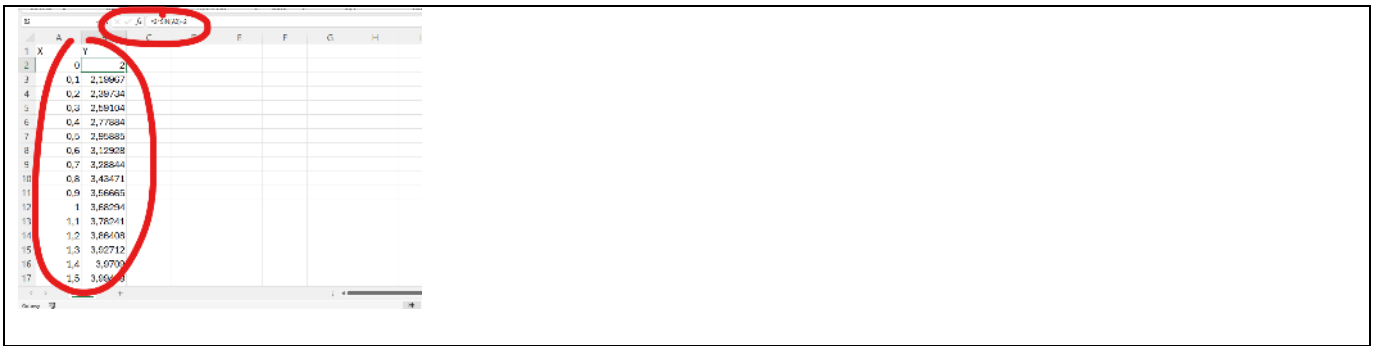
Tabela do wykresu (1)

Aby narysować wykres punktowy funkcji matematycznej należy:




w jednej kolumnie ustawić punkty dla osi X

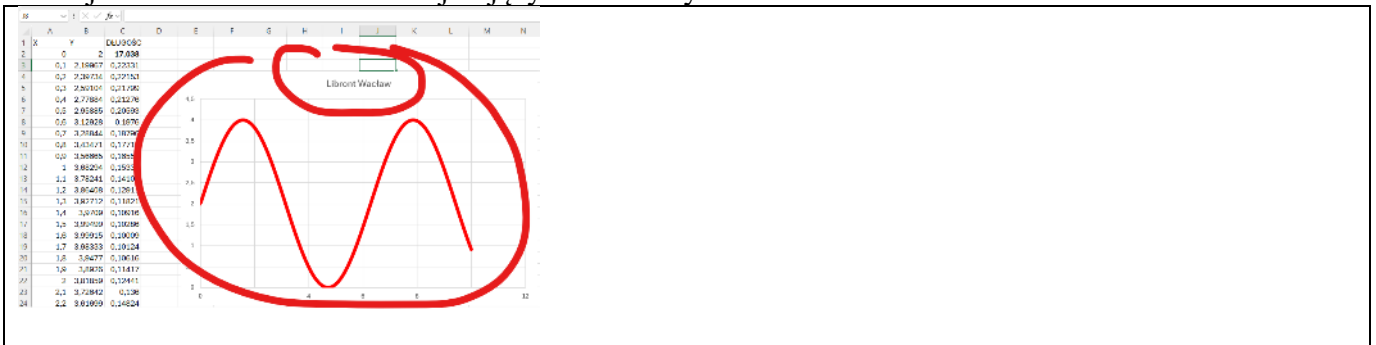
w drugiej kolumnie wyliczyć punkty dla osi Y z podanego wzoru

- Uruchom arkusz kalkulacyjny
- Zmień nazwę zakładki na **PIECHUR**
- A1 wpisz **X**
- A2 wpisz **0** (zero)
- A3 wpisz formułę: **=A2+0,1**
współrzędne X na wykresie zmieniają się w przedziale 0..10 co 0,1
- Wklej formułę na kolejne komórki, aż do wartości **10**
- B1 wpisz **Y**
- B2 wpisz formułę: **=2*SIN(A2)+2**
współrzędne Y na wykresie zmieniają zgodnie z wzorem
- Wklej formułę na kolejne komórki
- Zaznacz komórkę B2
- Wklej do ramki zrzut ekranu obejmujący arkusz i pasek formuły



Wykres punktowy (1)

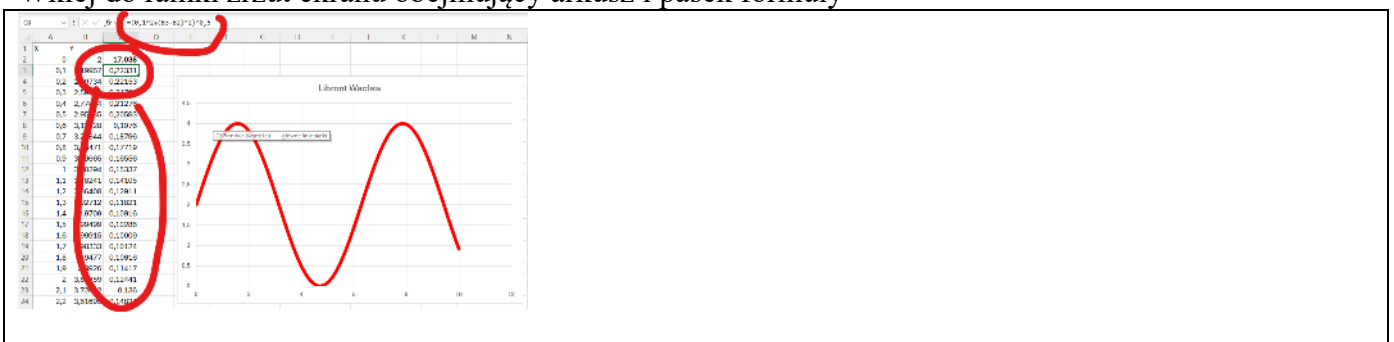
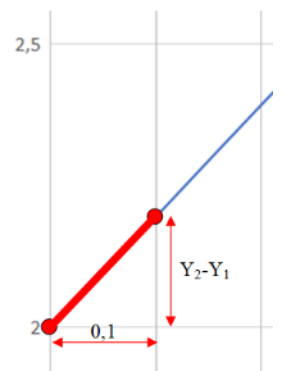
- Zaznacz kolumny A i B
- Wybierz: **Wstawianie – Wykres punktowy**  - 
- Tytuł wykresu - **Nazwisko i imię**
- Krzywa na wykresie **czerwona i gruba**
 - kliknij w krzywą w dowolnym miejscu
 - wybierz: **Formatowanie - Kontur** 
- Wklej do ramki zrzut ekranu obejmujący arkusz i wykres



Długość krzywej (1)

Długość krzywej obliczamy z tw. Pitagorasa, sumując wszystkie przekątne fragmentów krzywej zgodnie z wzorem $D = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$
 W naszym przypadku $X_2 - X_1$ wynosi 0,1, a $Y_2 - Y_1$ obliczymy odejmując wartości Y z kolumny B

- C1 wpisz napis **DŁUGOŚĆ**
- C3 wpisz formułę $= (0,1^2 + (B3 - B2)^2)^{0,5}$
- Wklej formułę na wszystkie komórki w komórce C2 nic nie obliczamy, bo nie ma od czego odejmować
- C2 wpisz formułę $= \text{SUMA}(C3:C102)$
suma wszystkich przekątnych obliczonych w kolumnie D. Przebyta droga przez piechura, to około 17 km
- Zaznacz komórkę C3
- Wklej do ramki zrzut ekranu obejmujący arkusz i pasek formuły



Zadanie

Samolot poruszał się ruchem zmiennym i jego prędkość można było opisać następującym wzorem:
 $V=2000 \cdot \sin^2(t)-1000 \cdot \cos(t^2)+1000$, gdzie: t - czas ruchu [h] i V prędkość ruchu [km/h].

Podróż trwała 5 godzin. Oblicz przebytą drogę.

Z lekcji fizyki wiemy, że drogę można obliczyć z wykresu $V(t)$, jako pole powierzchni pod tym wykresem.

$\cos^2(t)$ zapisujemy w arkuszu $\text{COS}(t)^2$

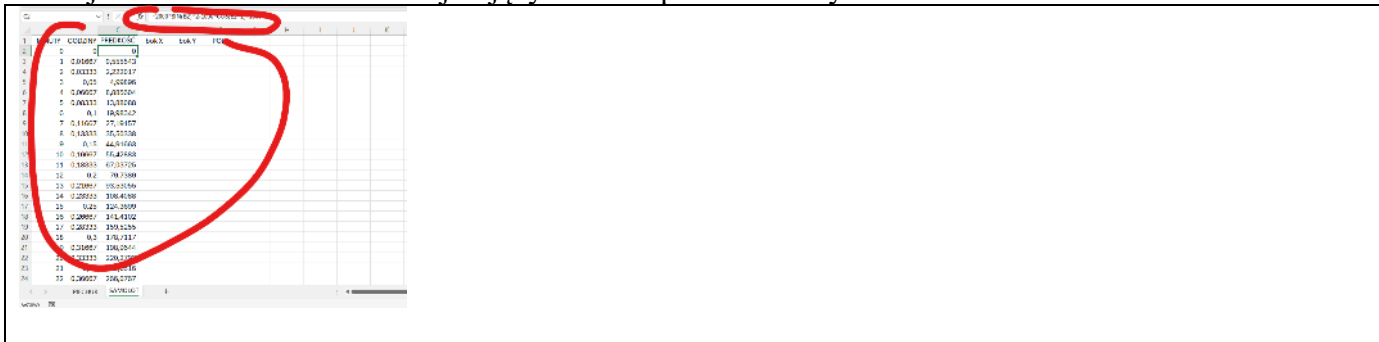
$\cos(t^2)$ zapisujemy w arkuszu $\text{COS}(t^2)$

Tabela (1)

- Wstaw nowy, pusty arkusz do skoroszytu **SHIFT+F11**
- Zmień nazwę zakładki na **SAMOLOT**
- Wpisz nagłówki kolumn

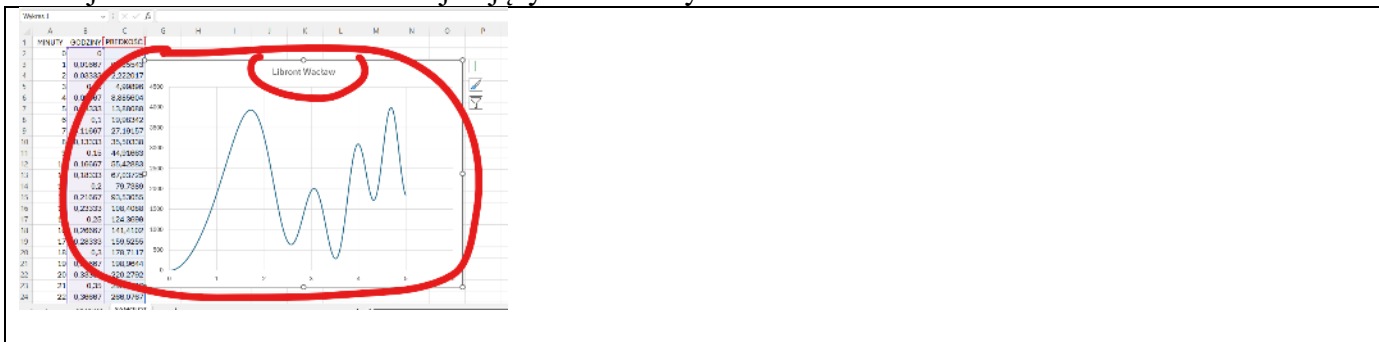
	A	B	C	D	E	F
1	MINUTY	GODZINY	PREDKOŚĆ	bok X	bok Y	POLE

- Obliczenia prowadzimy w minutach, aby zwiększyć dokładność. 5 godzin jazdy, to 300 minut.
- A2 wpisz liczbę **0**
- A3 wpisz formułę **=A2+1**
- Wklej formułę na kolejne 300 komórek do wiersza 302
- B2 wpisz formułę **=A2/60**
- Wklej formułę na kolejne 300 komórek
- C2 wpisz formułę **=2000*SIN(B2)^2-1000*COS(B2^2)+1000**
- Wklej formułę na kolejne 300 komórek
- Zaznacz komórkę C2
- Wklej do ramki zrzut ekranu obejmujący arkusz i pasek formuły



Wykres (1)

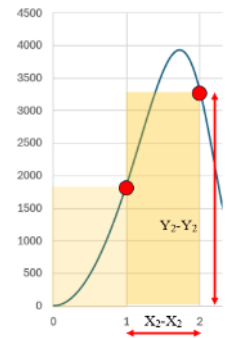
- Przygotuj wykres punktowy z kolumn B i C
- Tytuł - nazwisko i imię
- Wklej do ramki zrzut ekranu obejmujący arkusz i wykres



Pole powierzchni (1)

Pole powierzchni pod wykresem jest równe sumie wszystkich pola prostokątów pod poszczególnymi fragmentami krzywej.

- D3 wpisz formułę $=B3-B2$
- Wklej formułę na kolejne 300 komórek
 X_2-X_1 bok prostokąta w godzinach z kolumny B
 Y_2-Y_1 bok prostokąta - prędkość z kolumny C (zawsze liczona od zera)
- E3 wpisz formułę $=C3*D3$
- Wklej formułę na kolejne 300 komórek
- E2 podsumuj wszystkie komórki z kolumny E - od E3 do końca
- Zaznacz komórkę E2
- Wklej do ramki zrzut ekranu obejmujący arkusz i pasek formuły



Zadanie

Krzywa drgań tłumionych (np. fala na wodzie) ma postać $y = \left(1\frac{1}{3}\right)^{-\alpha} \cdot \sin(2\alpha)$,

gdzie α oznacza kąt w stopniach, który zmienia się od 0 do 720° co 1° .
 Oblicz pole powierzchni pod wykresem i długość krzywej.

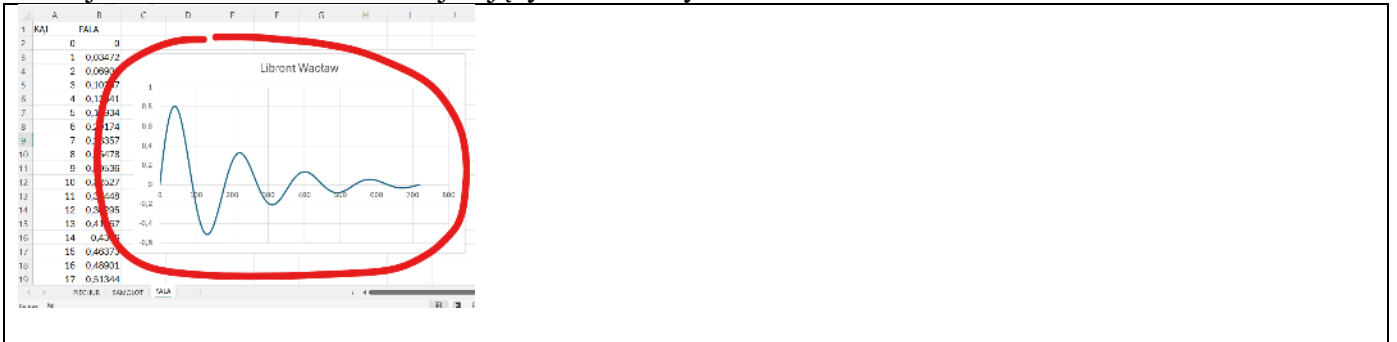
Tabela (1)

- Wstaw nowy arkusz do skoroszytu **SHIFT+F11**
 - Zmień nazwę arkusza na **FALA**
- | | A | B |
|---|-----|------|
| 1 | KĄT | FALA |
- Wpisz początkowe ustawienie komórek
 - A2 wpisz 0 (zero)
 - A3 wpisz formułę $=A2+1$
wartości kątów w stopniach
 - Wklej formułę z A3 na kolejnych 719 komórek
ostatnia wartość 720
 - B2 wpisz formułę $=\left(1+\frac{1}{3}\right)^{-\text{RADIANY}(A2)} \cdot \text{SIN}(2 \cdot \text{RADIANY}(A2))$
funkcje trygonometryczne arkusza operują na mierze łukowej, dlatego stopnie zamieniamy na radiany
 - Wklej formułę z B2 na pozostałe komórki
 - Zaznacz komórkę B2
 - Wklej do ramki zrzut ekranu obejmujący arkusz i pasek formuły



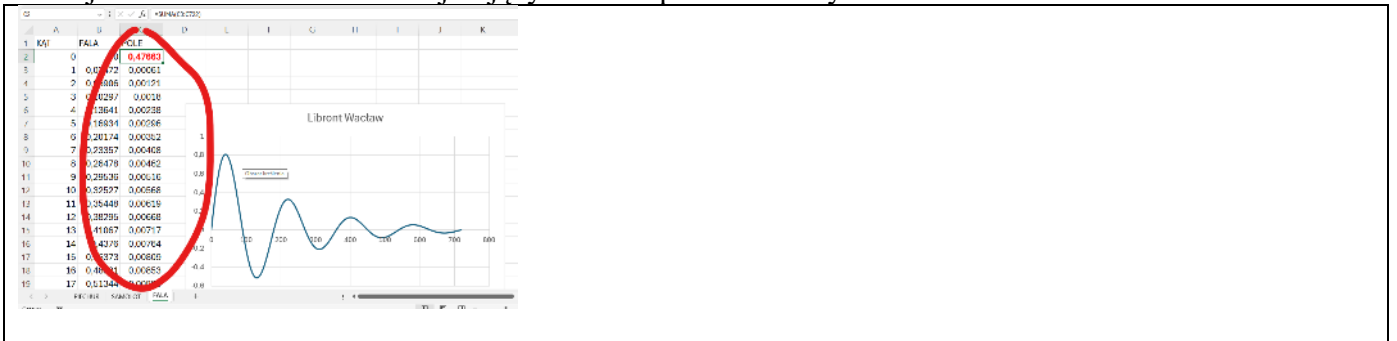
Wykres (1)

- Narysuj wykres punktowy z kolumn A i B
- Tytuł wykresu - Nazwisko i imię
- Wklej do ramki zrzut ekranu obejmujący arkusz i wykres



Pole powierzchni pod wykresem (1)

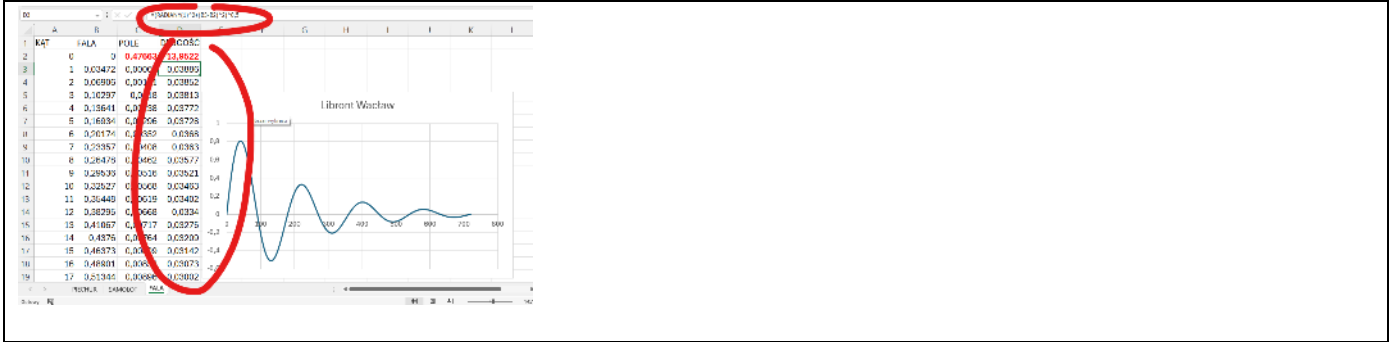
- C1 wpisz napis **POLE**
- C3 wpisz formułę $=\text{MODUŁ.LICZBY}(\text{RADIANY}(1)*\text{B3})$
pole powierzchni prostokąta o bokach: 1 stopień x wysokość fali
używamy funkcji MODUŁ.LICZBY dlatego, że pole „pod wykresem” wychodzi ujemne
- Wklej formułę na wszystkie komórki
- C2 wylicz sumę wszystkich pól od komórki C3 do końca kolumny
- Wklej do ramki zrzut ekranu obejmujący arkusz i pasek formuły



Długość krzywej (1)

- D1 wpisz napis **DŁUGOŚĆ**
- D3 wpisz formułę $=\text{RADIANY}(1)^2 + (\text{B3} - \text{B2})^2)^{0,5}$
długość odcinka z tw. pitagorasa, trójkąt ma boki 1 stopień x różnica wysokości fal
długość „pod wykresem” nie wychodzi ujemna, dlatego, że podnosimy do kwadratu
- Wklej formułę na wszystkie komórki w dół
- D2 wylicz sumę wszystkich długości od komórki D3 do końca kolumny
- Zaznacz komórkę D3

- Wklej do ramki zrzut ekranu obejmujący arkusz i pasek formuły



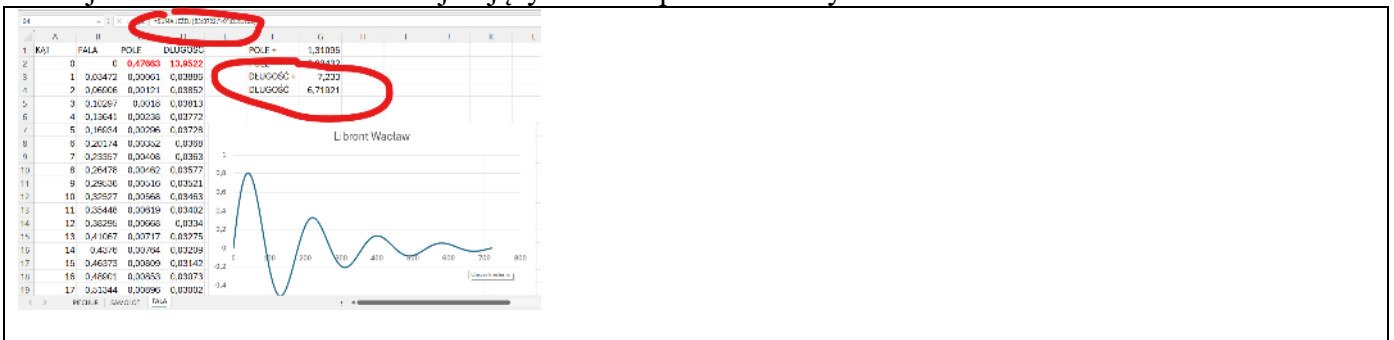
Pole „nad” i „pod” osią (1)

- F1 wpisz napis **POLE +**
- F2 wpisz napis **POLE -**
- G1 wpisz formułę $=SUMA.JEŻELI(B3:B722;">=0";C3:C722)$
sumowanie wszystkich pól powierzchni – kolumna C, dla których fala – kolumna B jest dodatnia
- G2 wpisz formułę $=SUMA.JEŻELI(B3:B722;"<0";C3:C722)$
sumowanie pól pod wykresem
- Zaznacz komórkę G1
- Wklej do ramki zrzut ekranu obejmujący arkusz i pasek formuły



Długość „nad” i „pod” osią (1)

- F1 wpisz napis **DŁUGOŚĆ +**
- F2 wpisz napis **DŁUGOŚĆ -**
- F3 wpisz formułę $=SUMA.JEŻELI(B3:B722;">=0";D3:D722)$
sumowanie długości fal nad wykresem – dodatnie
- F4 wpisz formułę $=SUMA.JEŻELI(B3:B722;"<0";D3:D722)$
sumowanie długości fal pod wykresem – ujemne
- Zaznacz komórkę F3
- Wklej do ramki zrzut ekranu obejmujący arkusz i pasek formuły



Zadanie - Malowanie

Należy pomalować fragment tunelu ograniczony dwoma krzywymi parametrycznymi:

$$X1=40\sin(t) \quad Y1=100\cos(t)$$

$$X2=25\sin(t) \quad Y2=80\cos(t)$$

Parametr t zmienia się od kąta -90° do kąta 90°

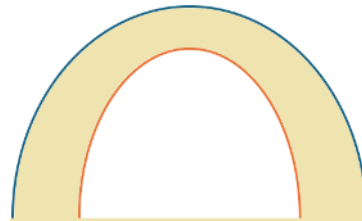
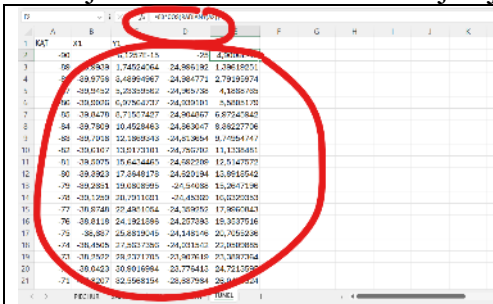


Tabela (1)

- Utwórz nową zakładkę w arkuszu kalkulacyjnym
- Nazwij zakładkę **TUNEL**
- W pierwszym wierszu wpisz nazwy kolumn

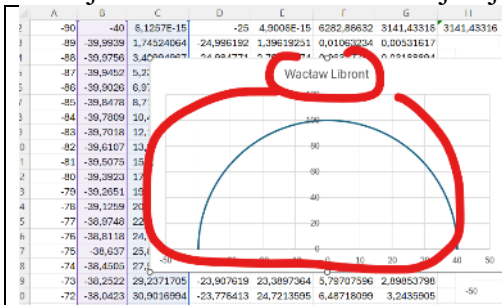
	A	B	C	D	E
1	KĄT	X1	Y1	X1	Y2

- A2 -90
- A3 =A2+1
- Wklej formułę na kolejne komórki aż do wartości 90 wiersz 182
- B2 =40*SIN(RADIANY(A2))
- C2 =100*COS(RADIANY(A2))
- D2 =25*SIN(RADIANY(A2))
- E2 =80*COS(RADIANY(A2))
- Wklej wszystkie formuły na kolejne komórki
- Wybierz komórkę E2
- Wklej do ramki zrzut ekranu obejmujący arkusz i pasek formuły

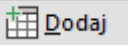


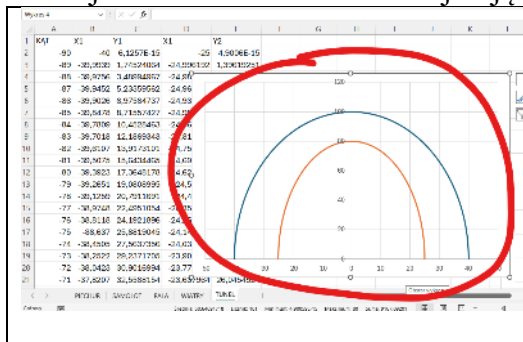
Wykres - krzywa 1 (1)

- Zaznacz wartości z kolumn B i C
- Wstaw wykres punktowy
- Tytuł wykresu - nazwisko i imię
- Wklej do ramki zrzut ekranu obejmujący arkusz i wykres



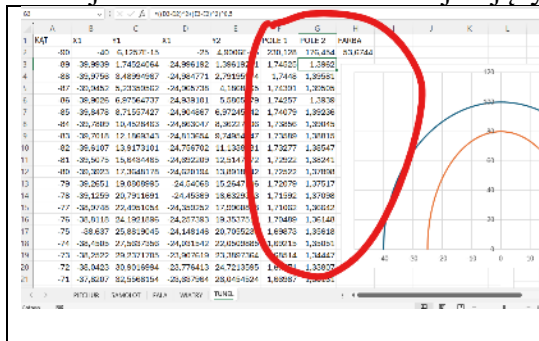
Wykres - krzywa 2 (1)

- Kliknij w wykres
- Wybierz: **Projekt wykresu - Zaznacz dane**
- Wybierz przycisk **Dodaj** 
- W oknie **Edytowanie serii** wklej
 Nazwa serii - =TUNEL!\$E\$1
 Wartości X - =TUNEL!\$D\$2:\$D\$182
 Wartości Y - =TUNEL!\$E\$2:\$E\$182
- Wklej do ramki zrzut ekranu obejmujący arkusz i wykres



Pole (1)

- F1 wpisz POLE 1
- F3 wpisz formułę: $= (B3 - B2) * C3$
pola powierzchni prostokątów dla krzywej 1
- F2 podsumuj wszystkie pola od F3 do końca
- G1 wpisz POLE 1
- G3 wpisz formułę: $= (D3 - D2) * E3$
pola powierzchni prostokątów dla krzywej 2
- G2 podsumuj wszystkie pola od G3 do końca
- H1 wpisz FARBA
- H2 oblicz różnicę pomiędzy F2 i G2
tylę farby potrzeba na pomalowanie wejścia do tunelu
- Wybierz komórkę G3
- Wklej do ramki zrzut ekranu obejmujący arkusz i pasek formuły



Długość - krzywa 1 (1)

Krawędzie tunelu zostaną „przystrojone” ledowym oświetleniem - obliczamy długości

- I1 wpisz **DŁUGOŚĆ 1**
- I3 wpisz formułę: $= ((B3 - B2)^2 + (C3 - C2)^2)^{0,5}$
- I2 podsumuj wszystkie pola od F3 do końca
- J1 wpisz **DŁUGOŚĆ 1**
- J3 wpisz formułę: $= ((D3 - D2)^2 + (E3 - E2)^2)^{0,5}$

- J2 podsumuj wszystkie pola od G3 do końca
- K1 wpisz **LEDY**
- K2 oblicz sumę I2 i J2
taką długość oświetlenia należy przygotować
- Wybierz komórkę J3
- Wklej do ramki zrzut ekranu obejmujący arkusz i pasek formuły

