Niepewności pomiarowe

Fizyka jest NAUKĄ, to znaczy, że wszystkie problemy, którymi się zajmuje opisywane są językiem matematyki i weryfikowane pomiarami i powtarzalnymi doświadczeniami. Inne dziedziny wiedzy (np. „nauki” humanistyczne) opierają swoją wiedzę na materiałach piśmiennych i słownych. jakiś człowiek coś napisał lub powiedział i tym się zajmujemy, i rozważamy, co autor miał na myśli. Doświadczalne sprawdzanie i pomiary w fizyce są bardzo ważne, więc tym się na początku zajmiemy.

Ćwiczenie
Weź linijkę i spróbuj zmierzyć np. długość ławki. W zależności od różnych czynników zmierzone długości będą się różnić. Tak już niestety jest we wszystkich pomiarach, że cokolwiek byśmy nie mierzyli i jakimkolwiek super nawet dokładnym przyrządem, to zawsze pomiar będzie niedokładny (nie wiadomo, który z pomiarów może być uznany za prawdziwy).

Wszystkie przyrządy pomiarowe: linijka, zegar, termometr za oknem, kratki zeszytu mierzą z określoną dokładnością. Dokładność ta wyznaczona jest najmniejszą podziałką na linijce – jest to tzw. **rozdzielczość przyrządu.** Aby pomiar bardziej odzwierciedlał rzeczywistą wartość można zmierzyć obiekt kilka razy i wyciągnąć średnią.

Jak zapisujemy pomiary w fizyce i technice?
Podajemy uśredniony wynik i dopisujemy błąd związany z rozdzielczością przyrządu np.

$$75,4 \pm 0.5$$

To oznacza, że przeciętna ławka może mieć długość pomiędzy 74,9 – 75,9, a najczęściej wynosi 75,4. Zapis ±0.5 nazywamy **niepewnością pomiarową** i oznaczamy Δ (delta)
Symbolicznie pomiar można zapisać wzorem

$$L = l \pm \Delta l$$

Niepewność względna
Jeśli zmierzymy długość (147±1) i grubość (7+-1) np. smartfona linijką, to precyzja tych pomiarów będzie inna, bo dokładniej zmierzymy długość dłuższą, dlatego też stosuje się jeszcze jeden wskaźnik Aby porównać różne pomiary stosuje się tzw. **niepewność względną** która opisuje precyzję pomiaru – im mniejsza niepewność tym lepszy pomiar (lepsza precyzja)

$$NW = \Delta l \,/\, l$$

Dzielimy niepewność (bezwzględną) przez pomiar

Zaokrąglanie - ilość cyfr znaczących
Po policzeniu średniej wyjdzie np. taki wynik 70,731000456 ±0,5 [cm]
Gdy podajemy wyniki pomiarów, to sam pomiar podajemy z tyloma cyframi po przecinku, ile cyfr ma błąd pomiarowy. Dla naszego przykładu 70,7±0.5[cm]
Inne przykłady:
70,731000456 ±1[cm] 71±1[cm]
700,731000456 ±0,1[cm] 7,731±0,001[m]

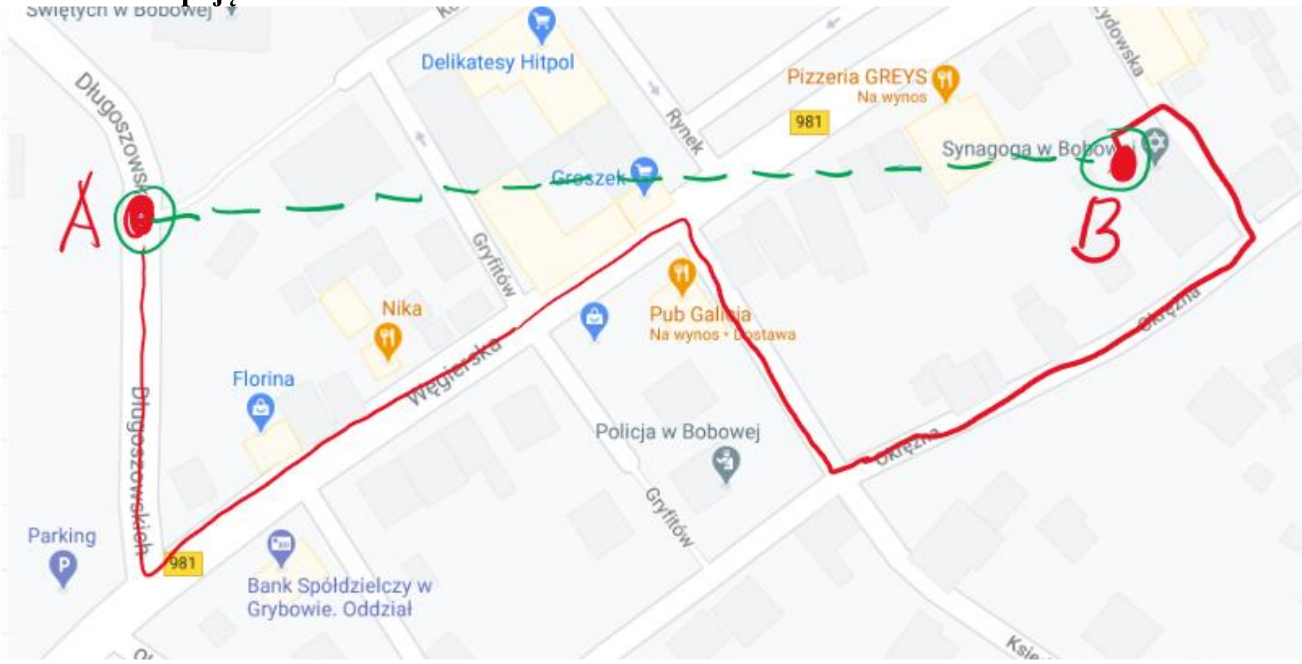
Podsumowanie
Każdy pomiar obarczony jest błędem – niepewnością pomiarową Δl
Wynik pomiarów zawsze podajemy w postaci l±Δl
Rozdzielczość przyrządu to najmniejsza wielkość jaką można na nim odczytać

Zadanie
Niepewność względna wynosi 2%, długość ławki wynosi 0,92 m a boiska 100m Jaka jest niepewność bezwzględna (zrobić to na ułamkach bez kalkulatora)
$NW=\Delta l/l$ stąd $\Delta l=NW\cdot l$
$\Delta lb=0,02\cdot 110$ [m] = 2/100•110/100 $\Delta lł=0,02\cdot 0,92$ [m] = 2/100 •92/100

Kinematyka. Ruch jednostajny.

Ruch jest najbardziej podstawowym zjawiskiem we Wszechświecie. Z ruchem mamy do czynienia wtedy, gdy jedno ciało zmienia położenie względem innego ciała – mówimy, że jest to **ruch względny**, bo zawsze poruszamy się względem innego obiektu (tzw. układu odniesienia). Nawet nie ruszając w klasie poruszamy się względem np. Księżyca. Część fizyki zajmująca się ruchem, to **kinematyka**.

Elementarne pojęcia



Tor ruchu – to (czerwona) linia, którą zakreśla poruszający się obiekt (czerwona na rysunek)
Droga – długość toru ruchu (np. 650 metrów)
Przemieszczenie – najmniejsza odległość pomiędzy początkiem i końcem toru ruchu (np. w prostej zielonej linii 320 metrów)
Prędkość – stosunek drugi przebytej przez poruszający się obiekt (s) do czasu, w jakim ten ruch się odbywał (t). Jednostką prędkości jest metr przez sekundę.

$$V = \frac{s}{t} \left[\frac{m}{s}\right] = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_k - s_p}{t_k - t_p}$$

Δs – przyrost drogi, Δt – przyrost czasu,
S_k – droga końcowa, S_p – droga początkowa, t_k – czas końcowy, t_p – czas początkowy

Jeśli w zadaniach występują konkretne wartości drogi i czasu (np. w ciągu 4 minut piechur przeszedł 200 metrów), to posługujemy się wzorem podstawowym.
Gdy zadania stają się bardziej skomplikowane (np. w 3 minucie ruchu piechur znajdował się 3 km od domu, a w 10 już tylko 2 km) lub mamy do czynienia z wykresami przydatne stają się wzory z przyrostami (Δ) i obliczając przyrost drogi czy też przyrost czasu, **zawsze** odejmujemy końcową wartość (k) od początkowej (p) .

Przeliczanie jednostek
W fizyce wszystkie obliczenia należy doprowadzić do jednostek w układzie SI, czyli metrów, sekund, kilogramów, itd.

Zadanie
Przelicz prędkość wyrażoną w km/h na jednostki w układzie SI

$36\frac{km}{h}$ ile to $\frac{m}{s}$? $\qquad 36\frac{km}{h} = 36 \cdot \frac{1000}{3600}\frac{m}{s} = 100\frac{m}{s}$

Która z prędkości jest większa $10\frac{m}{s}$ czy $20\frac{km}{h}$?

Przeliczymy jednostki w drugą stronę metry i sekundy na kilometry i godziny

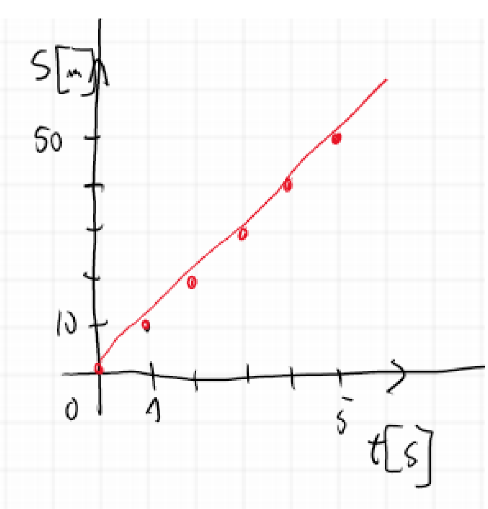
$$10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 10\cdot\frac{\frac{1}{1000}\mathrm{m}}{\frac{1}{3600}\mathrm{s}} = 10\cdot\frac{1}{1000}\cdot\frac{3600}{1}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 36\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

Względność ruchu
Analiza motorówek na rzece str. 14-15 podręcznika

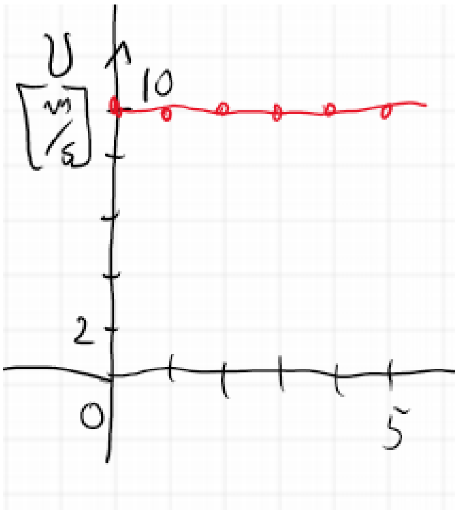
Ruch jednostajny
Jeżeli prędkość ruchu jest stała (np. samochód jedzie z prędkością 60 km/h), to ruch jest jednostajny**.** Droga w takim ruchu jest wprost proporcjonalna do czasu, to znaczy że w takich samych jednostkach czasu (np. co sekundę) samochód przejeżdża taką samą drogę (np. 10 metrów).

Wykresy prędkości i drogi w funkcji czasu
Zadanie
Samochód jedzie przez Bobową ze stałą prędkością 36 [km/h]. Narysuj wykres drogi i prędkości w funkcji czasu.

W poprzednim zadaniu obliczyliśmy, że 36 km/h to 10 m/s – czyli w każdej sekundzie auto przejeżdża 10 m.



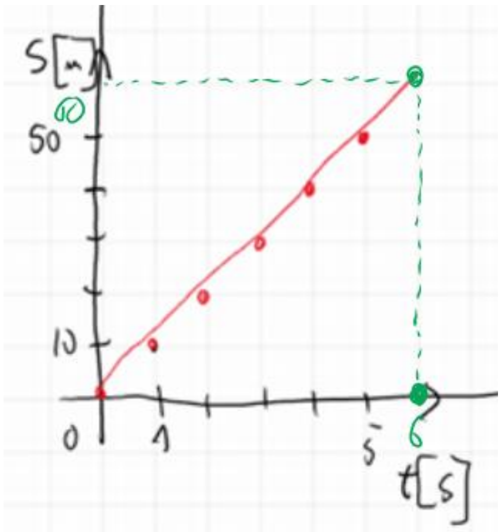
wykres drogi (s) w czasie (t) – s(t)



wykres prędkości (V) w czasie (t) – V(t)

Zadanie
Jaką drogę przejedzie ten samochód po 6 sekundach ruchu?
Jaką drogę przejedzie ten samochód w 6 sekundzie ruchu?

Samochód porusza się ruchem jednostajnym, to znaczy, że w kolejnej sekundzie przejedzie 10 metrów i przejedzie 50+10=60 metrów.
W 6 sekundzie ruchu przejedzie 10 metrów – podobnie jak i w każdej poprzedniej sekundzie.
Wszystkie te wyniki powinniśmy umieć wyliczać za pomocą wzorów i odczytywać z wykresów.



Na wykresie s(t) rozwiązanie zadania pokazuje zielona linia.
Z wzoru należy wyliczyć drogę końcową s_k po kilku przekształceniach

$$V = \frac{s_k - s_p}{t_k - t_p} \rightarrow V \cdot (t_k - t_p) = s_k - s_p \rightarrow s_k = s_p + V \cdot (t_k - t_p)$$

$V=10$, $s_p=0$, $t_p=0$, $t_k=6$ podstawiamy do wzoru i otrzymujemy

$$s_k = 0 + 10 \cdot (6 - 0) = 60$$

Taki sam wynik otrzymamy jeśli przyjmiemy, że początek ruchu był, np. w 3 sekundzie: $s_p=30$, $t_p=3$

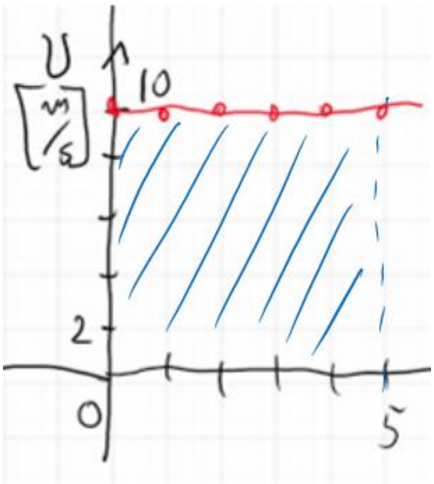
$$s_k = 30 + 10 \cdot (6 - 3) = 60$$

Pole powierzchni pod wykresem

Przekształcony wzór na prędkość

$$s = V \cdot t$$

przypomina wzór na pole powierzchni prostokąta o bokach V i t, co pozwala wyliczać drogę bezpośrednio z wykresów.

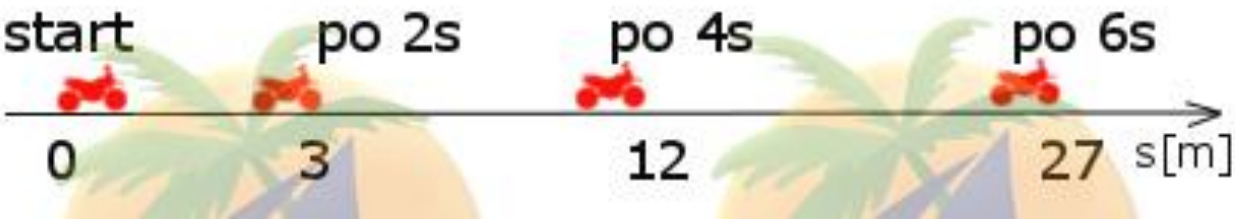


Na wykresie zakreskowano prostokąt o bokach V=10 i t=5, co daje pole powierzchni 50 i to jest jednocześnie przejechana droga po 5 sekundach z prędkością 10 m/s.

Kinematyka. Ruch zmienny. Przyspieszenie.

Bardzo rzadko spotykamy się z ruchem jednostajnym, w którym prędkość się nie zmienia. Zwykle prędkość rośnie (przyspieszający samochód) i mówimy wtedy o ruchu przyspieszonym lub prędkość maleje (hamujący samochód) i nazywamy to ruchem opóźnionym. Zwykle takie przyspieszenia lub opóźnienia trwają krótko.

Prześledźmy zmiany położenia samochodu w czasie, w trakcie przyspieszania.



Czy możliwe jest wyliczenie kolejnego położenia motocykla, gdy będzie nadal przyspieszał?

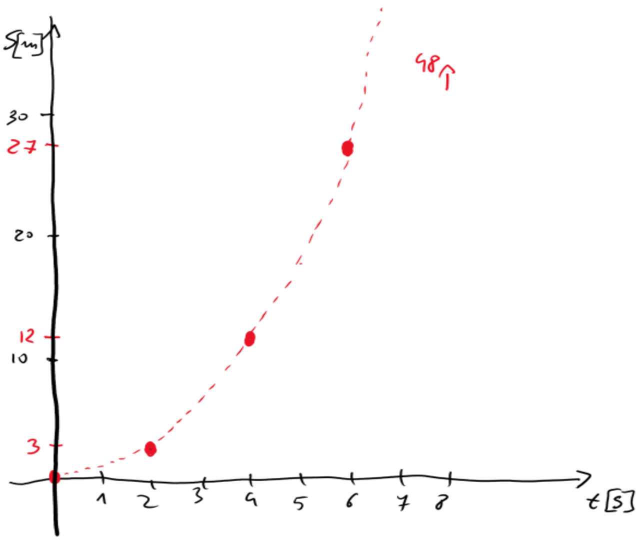
	0	3	12	27	x 48
różn 1	3	9	15	21	
różn 2		6	6	6	

W pierwszym wierszu zapisano kolejne położenia: 0, 3, 12, 27.
W drugim wierszu mamy różnice pomiędzy tymi położeniami, a w trzecim różnice tych różnic. Jak łatwo dostrzec są one takie same i wynoszą 6. Jest to znana fizykom i matematykom prawidłowość, która pozwala przewidzieć kolejne etapy badanego zjawiska.
Z obliczeń wynika, że po 8 sekundach motocykl przejedzie 48 metrów.

Przyspieszenie - wzór i jednostka
Przyspieszenie wyliczamy dzieląc prędkość przez czas. Podobnie jak w przypadku prędkości, jest to najprostszy model. W przypadku analizy wykresów lub rozwiązywania bardziej złożonych zadań, konieczne będzie zastosowanie przyrostów prędkości i czasu. Jednostką przyspieszenia jest metr przez sekundę do kwadratu.

$$a = \frac{V}{t} \quad \left[\frac{m}{s^2}\right] = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_k - V_p}{t_k - t_p}$$

Wykres drogi w czasie
Rysujemy na wykresie x(t) punkty – wynikiem jest krzywa, którą w matematyce nazywamy parabolą.



Wykres przyspieszenia w czasie

Na lekcjach matematyki dowiesz się jak zapisywać taką krzywą w postaci wzoru. Do naszych kolejnych rozważań wystarczy wiedzieć, że drogę można wyliczyć teoretycznie z wzoru:

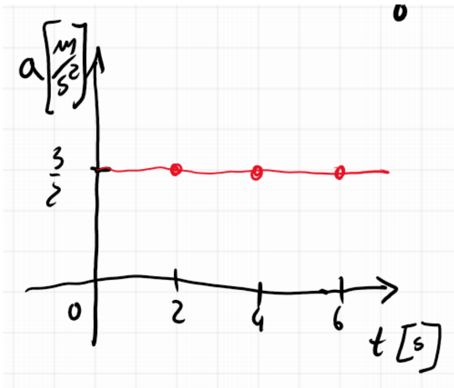
$$s = a \cdot \frac{t^2}{2} \quad \rightarrow \quad a = \frac{2 \cdot s}{t^2}$$

a po przekształceniu także przyspieszenie (mając dane przebyte drogi w odcinkach czasu.
Obliczymy przyspieszenie dla kilku punktów

$$a_2 = \frac{2 \cdot 3}{2^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$a_4 = \frac{2 \cdot 12}{4^2} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$$

$$a_6 = \frac{2 \cdot 27}{6^2} = \frac{54}{36} = \frac{3}{2}$$



Jak zapewne zauważyłeś przyspieszenie jest stałe i wynosi 3/2 m/s^2

Wykres prędkości w czasie

Teraz możemy narysować wykres prędkości w czasie w ruchu jednostajnie przyspieszonym. Jest linia prosta – w jednakowych odcinkach czasu przyrosty prędkości są takie same.

$$V = a \cdot t$$

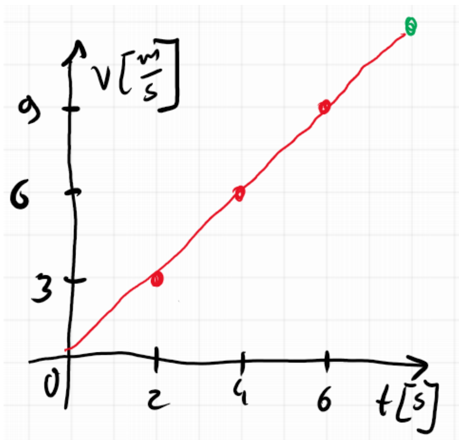
$$V = a \cdot t$$

$$V_2 = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3 \qquad 3$$

$$V_4 = \frac{3}{2} \cdot 4 = 6 \qquad 3$$

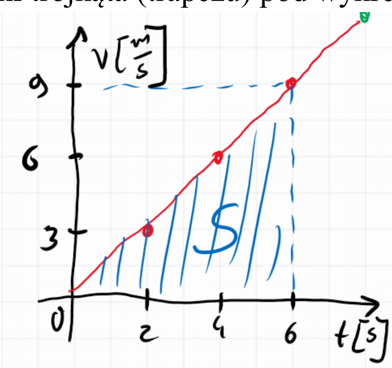
$$V_6 = \frac{3}{2} \cdot 6 = 9 \qquad 3$$

$$V_8 = \quad 12$$

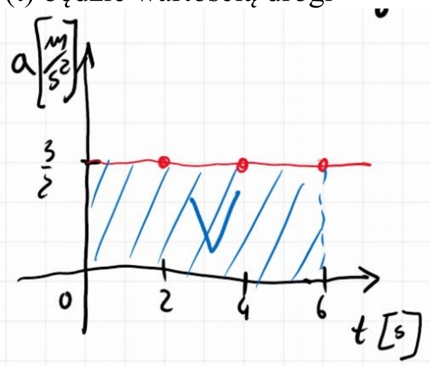


Pole powierzchni pod wykresem

Podobnie, jak w przypadku ruchu jednostajnego, możemy posługiwać się wykresami, aby z pól powierzchni obliczać prędkość.
Pole powierzchni prostokąta pod wykresem a(t) będzie wartością prędkości
Pole powierzchni trójkąta (trapezu) pod wykresem V(t) będzie wartością drogi



$s_6 = 1/2 \cdot 6 \cdot 9 = 27$ [m]



$V_6 = 6 \cdot 3/2 = 9$ [m/s]

Kinematyka. Opóźnienie. Analiza wykresów i zadania

Jak wygląda ruch pojazdu, gdy hamuje? - zmiany prędkości w czasie zachodzą w odwrotnej kolejności.

Zadanie

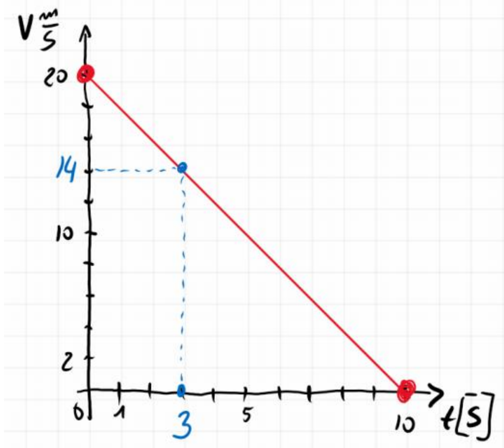
Samochód jedzie początkowo z prędkością 72 km/h i zaczyna hamować. Zatrzymuje się po 10 sekundach. Narysuj wykres opóźnienia, prędkości i położenia w czasie.

Prędkość początkową zamieniamy na jednostki w układzie SI

$$72\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 72 \cdot \frac{1000}{3600}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Prędkość początkowa – 20 [m/s], prędkość końcowa – 0 [m/s] (samochód się zatrzymuje)

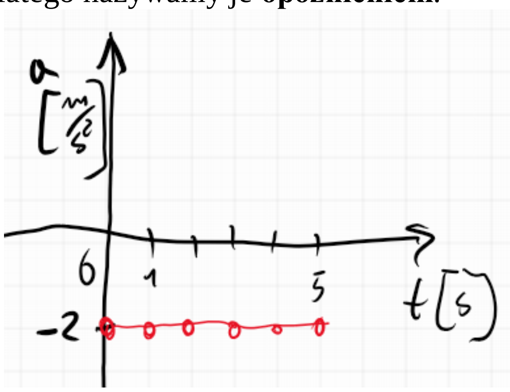
Skoro jest to ruch jednostajny, to możemy wykreślić linię pomiędzy punktami początkowym i końcowym na wykresie V(t) i tym samym w łatwy sposób wyznaczyć prędkość w każdej sekundzie. Na przykład w 3 sekundzie prędkość hamującego samochodu wynosiła 14 m/s.



Obliczamy przyspieszenie, które powinno być stałe, bo stałe przyrosty prędkości w czasie

$$a = \frac{V_k - V_p}{t_k - t_p} = \frac{0 - 20}{10 - 0} = -2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Przyspieszenie jest **ujemne** i dlatego nazywamy je **opóźnieniem**.



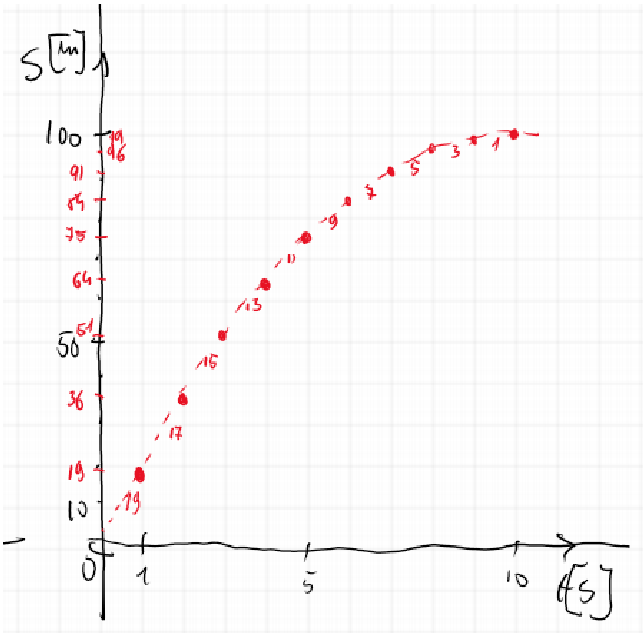
Jak wyznaczyć kolejne położenia samochodu podczas hamowania?

Poznaliśmy już wzór pozwalający wyliczać drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym $s = a \cdot \frac{t^2}{2}$. Nowa wersja wzoru pozwala obliczać drogę po uwzględnieniu prędkości początkowej:

$$s = V_p \cdot t + a \cdot \frac{t^2}{2}$$

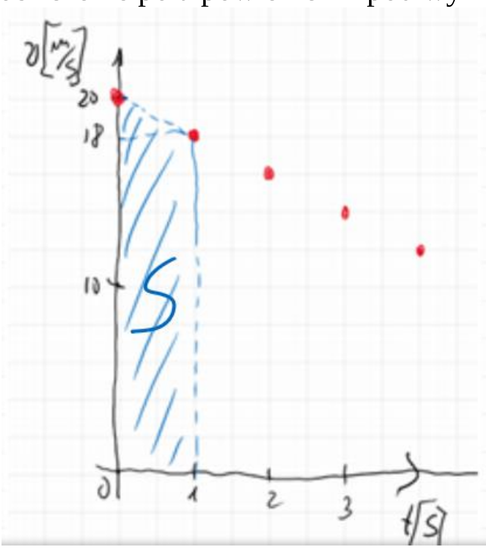
Dla kolejnych sekund możemy wyznaczyć drogę podczas hamowania i narysować wykres.

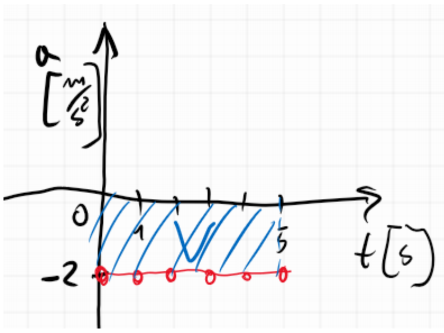
$$s_1 = 20 \cdot 1 + (-2) \cdot \frac{1^2}{2} = 19\,[m]$$
$$s_2 = 20 \cdot 2 + (-2) \cdot \frac{2^2}{2} = 36\,[m]$$
$$\ldots$$
$$s_9 = 20 \cdot 9 + (-2) \cdot \frac{9^2}{2} = 99\,[m]$$
$$s_{10} = 20 \cdot 10 + (-2) \cdot \frac{10^2}{2} = 100\,[m]$$



Po 10 sekundach hamowania, pojazd zatrzymuje się po przejechaniu 100 metrów.

Podobnie, jak w przypadku przyspieszania, z wykresu V(t) możemy wyliczyć drogę poprzez obliczenie pola powierzchni pod wykresem – tym razem są to trapezy.





Prędkość możemy wyznaczyć graficznie (pole powierzchni) z wykresu przyspieszenie - musimy tylko uwzględnić prędkość początkową. Wykorzystamy wzór na prędkość końcową, który można wyprowadzić z podstawowego wzory na przyspieszenie.

$$V_k = V_p + a \cdot (t_k - t_p)$$

$$V_{k_1} = 20 + (-2) \cdot (1 - 0) = 18\,\frac{m}{s}$$
$$V_{k_3} = 20 + (-2) \cdot (3 - 0) = 14\,\frac{m}{s}$$

Zadanie

Do osiągnięcia 100 km/h samochodem Formuły 1 wystarczy 1,7 sekundy, natomiast prędkość 200 km/h samochody te osiągają w 3,8 sekundy. Oblicz średnie przyspieszenie bolidu podczas rozpędzania się

a) od 0 do 100 km/h
b) od 100 do 200 km/h

$\Delta V_1 = 100 \frac{km}{h}$

$\Delta t_1 = 1,7 s$

$\Delta V_2 = 200 \frac{km}{h}$

$\Delta t_2 = 3,8 s$

$a_1 = ?$

$a_2 = ?$

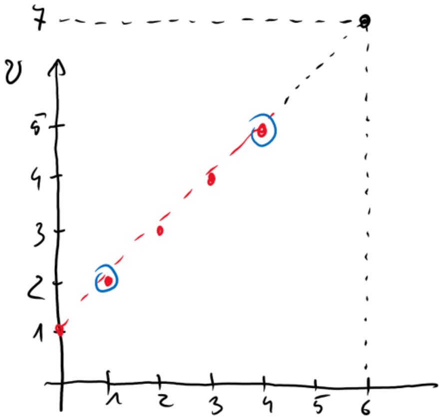
$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

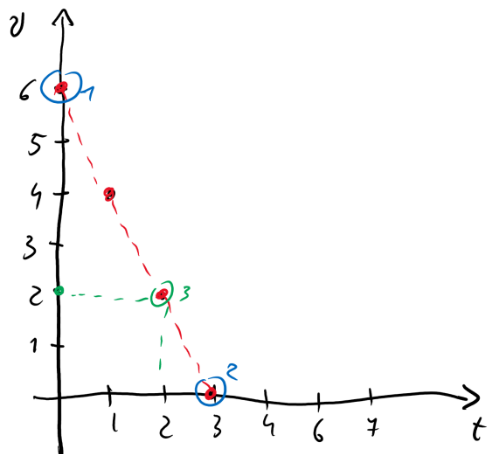
$a_1 = \frac{100 \frac{km}{h}}{1,7 s} = \frac{100 \frac{1000 m}{3600 s}}{\frac{17}{10} s} = \frac{100000}{3600} \cdot \frac{10}{17} \frac{m}{s^2} \approx 16$

$a_2 = \frac{200}{3,8} \approx 14$

$a_{200-100} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{200-100}{3,8-1,7} = \frac{100}{2,1} = \frac{100 \cdot \frac{1000}{3600}}{\frac{21}{10}} \approx 13 \frac{m}{s^2}$

Zadanie





Mamy dwa przykłady ruchu: przyspieszony i opóźniony, jak na wykresach V(t). Spróbujemy policzyć przyspieszenia. A potem sprawdzimy czy potrafimy policzyć prędkość końcową i początkową z podanych wzorów.

Jaka będzie prędkość w przyspieszającego samochodu 7 sekundzie

Jaka była prędkość hamującego samochodu w 3 sekundzie

$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{5-2}{4-1} = \frac{3}{3} = 1$

$v_6 = v_1 + a \cdot (t_6 - t_1) = 2 + 1 \cdot (6-1) = 7$

$a = \frac{0-6}{3-0} = -2$

$v_3 = 6 + (-2) \cdot (2-0) = 2$

Podsumowanie

WZORY

Niepewność pomiarowa $L = l \pm \Delta l$

Niepewność względna $NW = \Delta l / l$

Ruch jednostajny

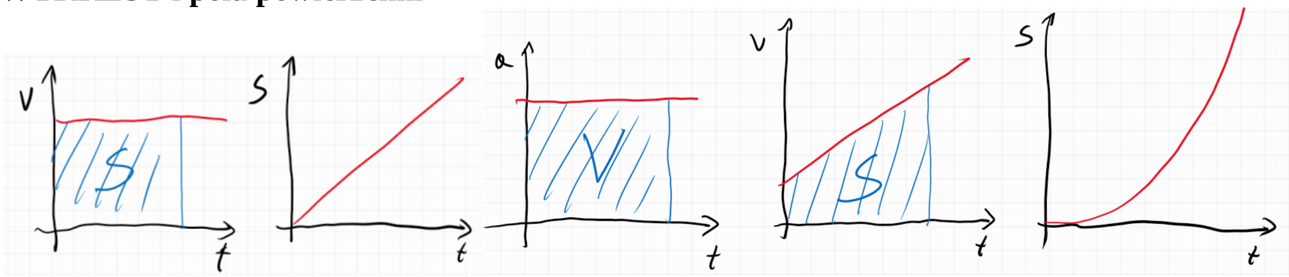
$$V = \frac{s}{t}\ \left[\frac{m}{s}\right] = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_k - s_p}{t_k - t_p} \quad \rightarrow \quad s_k = s_p + V \cdot (t_k - t_p)$$

Ruch jednostajnie przyspieszony (opóźniony)

$$a = \frac{V}{t}\ \left[\frac{m}{s^2}\right] = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_k - V_p}{t_k - t_p} \quad \rightarrow \quad V_k = V_p + a \cdot (t_k - t_p)$$

$$s = a \cdot \frac{t^2}{2} \qquad s = V_p \cdot t + a \cdot \frac{t^2}{2}$$

WYKRESY i pola powierzchni



Ruch jednostajny

s(t) – linia pochyła, prędkość stała, droga rośnie proporcjonalnie do czasu, w każdym odcinku czasu jest taki sam przyrost

v(t) – linia prosta, droga to pole powierzchni pod wykresem

Ruch jednostajnie przyspieszony

s(t) – parabola, droga rośnie (maleje) nieproporcjonalnie, w każdym odcinku czasu jest inny przyrost

v(t) – linia pochyła, przyspieszenie stałe, prędkość proporcjonalna do czasu

a(t) – linia prosta, prędkość to pole powierzchni pod wykresem

Pole powierzchni pod wykresem

Skoro $s=V\cdot t$, więc droga, to pole powierzchni prostokąta pod wykresem V(t) w ruchu jednostajnym, a w ruchu jednostajnie przyspieszonym, to pole trapezu (trójkąta)

Skoro $V=a\cdot t$, więc prędkość, to pole powierzchni prostokąta pod wykresem a(t)

Wykres położenia w jednostce czasu s(t) – w każdej jednostce czasu obiekt pokonuje coraz większą drogę (w ruchu jednostajnym taką samą)

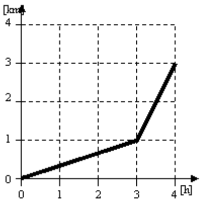
Wykres prędkości w jednostce czasu V(t) – w każdej jednostce czasu prędkość zwiększa się o tyle samo – ruch **jednostajnie przyspieszony**

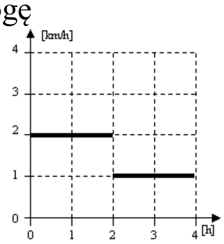
Wykres przyspieszenia w jednostce czasu a(t) – przyspieszenie jest stałe. Gdyby przyspieszenie nie było stałe, a prędkość nie linią prostą, wtedy mówimy o ruchu zmiennym.

Zadania

Przez pierwszą część pojazd przejechał 1 km w czasie 3 godzin, przez kolejną godzinę przejechał 2 km. Oblicz prędkość średnią.

Przez pierwsze 2 godziny pojazd jechał z prędkością 2 km/h, przez kolejne dwie 1 km/h. Oblicz przejechaną drogę





Zadanie Staszek i Zosia

Zosia jedzie rowerem ruchem jednostajnym z prędkością 4 m/s. Staszek jedzie samochodem z prędkością 20 m/s i dogania Zosię. W momencie, w którym Staszek zrównują się z Zosią zaczyna hamować ruchem jednostajnie opóźnionym i zatrzymuje się po 8 sekundach. Po pewnym czasie Zosia dociera do miejsca postoju Staszka.

Sporządź wykresy V(t) Zosi i Staszka w jednym układzie współrzędnych od momentu początku do końca hamowania.

Oblicz ile czasu Staszek będzie czekał na Zosię

Drogę przebytą przez Staszka obliczymy z pola powierzchni pod wykresem – trapez, a właściwie trójkąt

$s=V\cdot t/2 = 20\cdot 8/2=80$m

a teraz wzorem

$s=at^2/2$ i $a=\Delta V/\Delta t$

$a=20/8$ to $s=20/8\cdot 8^2/2 = 80$m

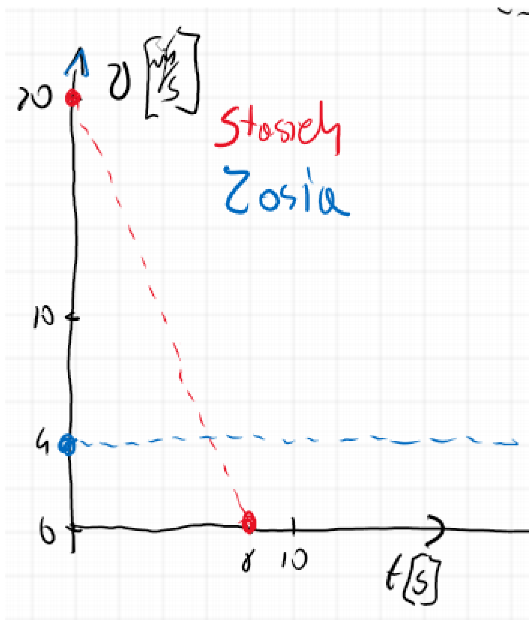
Aby obliczyć, jak długo Staszek będzie czekał na Zosię musimy wiedzieć, jak długo Zosia będzie jechała te 80m

s=80 m

V=4 m/s

t=s/V=80/4=20 s

Staszek hamował 8 s, to będzie czekał jeszcze 12 sekund na Zosię



Droga w ruchu jednostajnie przyspieszonym – wyprowadzenie wzoru
Skąd znany wzór $s=at^2/2$

pola powierzchni pod wykresem $V(t)$ w ruchu jednostajnie przyspieszonym są trapezami
Pole trapezu: $s=(Vk+Vp)\cdot\Delta t/2 \rightarrow s=Vk\cdot\Delta t/2$ oraz $a=(Vk-Vp)/\Delta t \rightarrow a=Vk/\Delta t \rightarrow Vk=a\cdot\Delta t$
Jeśli przyjmiemy, że Vp jest równe zero, dlatego że startujemy, to wstawiając otrzymujemy
$s=a\cdot\Delta t^2/2$ albo ładniej $a\cdot t^2/2$
Jeśli uwzględniamy prędkość początkową to wzór przyjmie postać
$s=Vp\cdot t+a\cdot t^2/2$