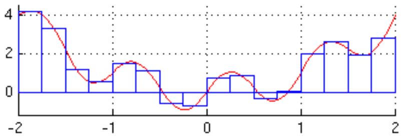
Całkowanie

Z matematycznego punktu widzenia całkowanie jest bardzo skomplikowanym procesem, najeżonym mnóstwem założeń, twierdzeń, wzorów i symboli. Z czysto użytkowego (i inżynierskiego) punktu widzenia całkowanie polega na wyliczeniu długości, pola powierzchni lub objętości przedmiotu. Oczywiście, aby było to możliwe, wielkości te należy opisać matematycznym równaniem. Użycie komputerów sprawia, że niepotrzebne są także analityczne metody, czyli skomplikowane wyprowadzanie wzorów.

W jaki sposób całkuje komputer? Czerwony wykres pokazuje przebieg jakiejś funkcji, a my chcemy policzyć pole powierzchni pod tym wykresem. W tym celu dzielimy cały obszar na niewielkie prostokąty, wyliczamy ich pola powierzchni i sumujemy. Oczywiście będzie to wynik niedokładny, ale zawsze można zmniejszyć bok prostokąta (tym samy zwiększyć ilość i dokładność) lub zamiast prostokątów zastosować trapezy albo jeden z boków zastąpić krzywą.

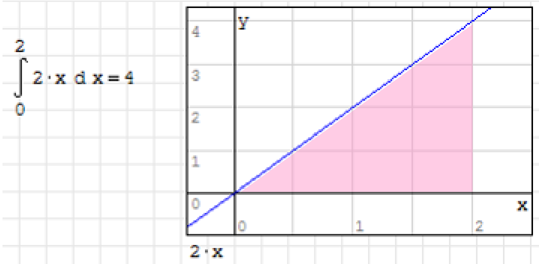


W matematyce całkowanie oznaczamy symbolem $\int$ a równanie $\int_1^{10} x^2 - 4\,dx$ oznacza, że liczymy pole powierzchni pod wykresem ograniczonym krzywą o równaniu x^2-4 w przedziale od 1 do 10. Symbol dx (czytamy „de iks”) dotyczy zmiennej z naszego równania.

ĆWICZENIE 1 - **pole trójkąta**

Oblicz pole powierzchni pod wykresem funkcji y=2x w przedziale od 0 do 2.

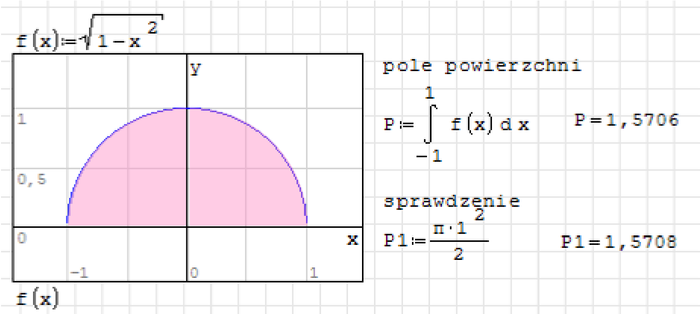
Wyliczenie nie przedstawia żadnej trudności. Dla zobrazowania narysujmy jeszcze wykres funkcji. Okazuje się, że pole powierzchni pod wykresem, to pole trójkąta o boku 2 i wysokości 4, czyli rzeczywiście jest równe 4.



ĆWICZENIE 2 - **pole koła**

Oblicz pole powierzchni ograniczonej krzywą $y=\sqrt{1-x^2}$ w przedziale od -1 do +1.

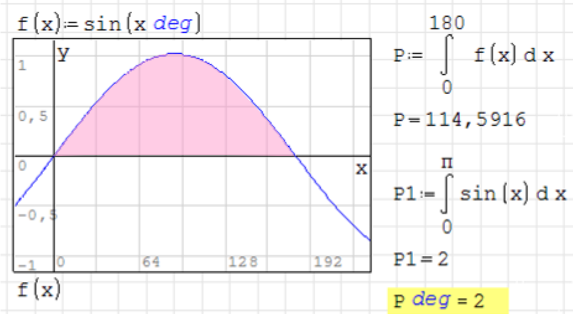
Po narysowaniu wykresu okazuje się, że mamy do czynienia z kołem (dokładnie z półkolem), którego wzór na pole doskonale jest znamy. Dla sprawdzenia poprawności całkowania zastosujemy zwykły wzór.



ĆWICZENIE 3 - **sinus**

Wylicz pole powierzchni pod krzywą y=sin(x) w przedziale 0 do 180 stopni.

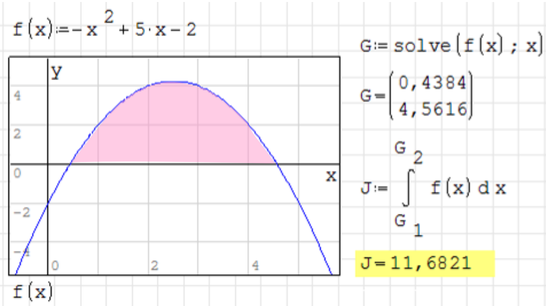
Obliczenia nie przedstawiają żadnych trudności. Należy uwzględnić jednak zamianę radianów na stopnie podczas obliczania całki. Dla sprawdzenia policzono również całkę bez zamiany na radiany (pole P1=2). Sprawdzenie wyników daje takie same rezultaty.



ĆWICZENIE 4 - **jezioro**

W parku ma powstać jezioro o kształcie wyznaczonym przez krzywą określoną równaniem $y=-x^2+5x-2$ i oś X. Wylicz pole powierzchni tego jeziora.

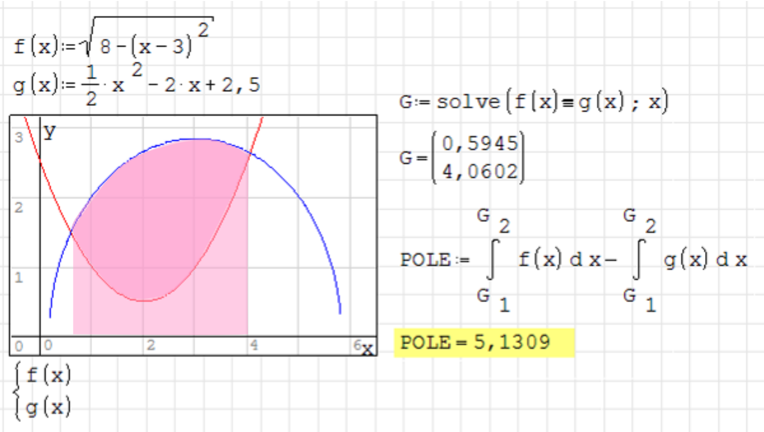
Wykres pokazuje kształt jeziora. Jedynym problemem są punkty graniczne jeziora. W naszym przypadku będą to pierwiastki równania kwadratowego, które wyznaczymy za pomocą funkcji solve.



ĆWICZENIE 5 - **łezka**

W parku ma powstać jezioro o kształcie wyznaczonym przez dwie krzywe określone równaniami: $y=-x^2+5x-2$ i oś X. Wylicz pole powierzchni tego jeziora

Rysunek pokazuje powierzchnię jeziora. Podobnie, jak w poprzednim zadaniu należy znaleźć punkty graniczne (przecięcie się dwóch krzywych), które jednocześnie stają się granicami całkowania. Różnica pól pod krzywymi daje poszukiwane pole (obszar ciemniejszy).



Długość krzywej

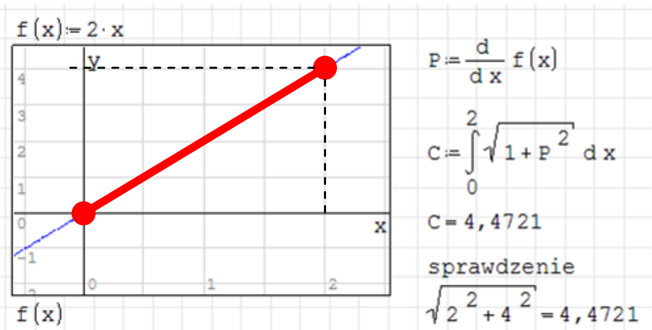
Długości również obliczamy metodami całkowania. Jeśli liczymy numerycznie (np. na arkuszu kalkulacyjnym), to sumujemy przekątne prostokątów (tw. Pitagorasa). Nieco bardziej skomplikowanie wygląda całkowanie algebraiczne (w programie typu CAS) i wzór na długość krzywej określony jest następującym równaniem: $\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$. Co ono oznacza?

- f(x) - funkcja, która określa kształt krzywej
- f'(x) - liczymy pochodną funkcji
- $f'(x)^2$ - podnosimy pochodną do kwadratu
- $\sqrt{1+f'(x)^2}$ - dodajemy jeden i pierwiastkujemy
- $\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$ - teraz możemy całkować w przedziale (a,b)
- Wynikiem całkowania jest długość krzywej

ĆWICZENIE 6 - **przekątna**

Oblicz długość krzywej, którą opisuje równanie y=2x w przedziale od 0 do 2.

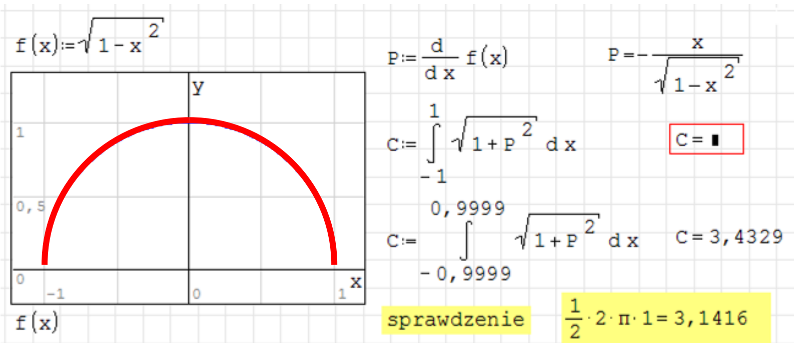
Na rysunku pokazano krzywą, której długość wyliczamy (czerwony odcinek). Najpierw liczymy pochodną P, a po wstawieniu do wzoru otrzymujemy długość. Sprawdzenie z pomocą tw. Pitagorasa.



ĆWICZENIE 7 - **długość łuku**

Oblicz długość krzywej, którą opisuje krzywa $y=\sqrt{1-x^2}$ w przedziale od -1 do +1.

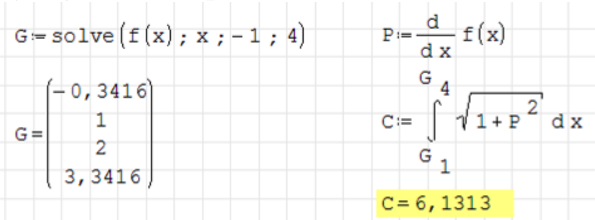
Jeżeli będziemy rozwiązywać to zadanie w sposób standardowy okaże się, że nie zdołamy policzyć długości w przedziale (-1, 1). Z matematycznego punktu widzenia okazuje się, że dla podanych wartości brzegowych nie istnieje rozwiązanie. Możemy jednak przyjąć wartości bardzo bliskie, np. (-0,9999, 0,9999) - otrzymamy wynik przybliżony.

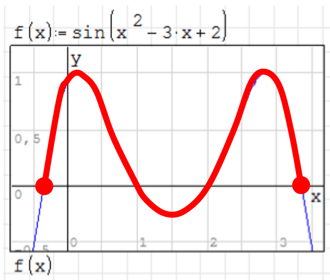


ĆWICZENIE 8 - **sinusoida**

Wylicz długość sinusoidy określonej równaniem $y=\sin(x^2-3x+2)$, w przedziale, który wyznaczają punkty przecięcia krzywej z osią X (patrz obrazek).

Za pomocą funkcji solve znajdujemy właściwe punkty i podstawiamy, jako granice całkowania.





ĆWICZENIE 9 - **praca rakiety**

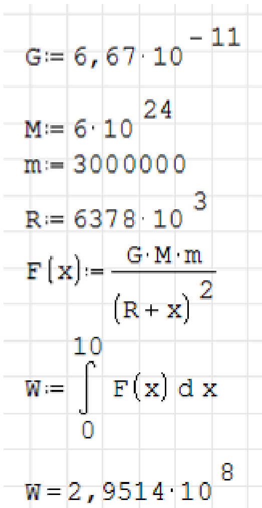
Oblicz pracę, jaką należy wykonać, aby podnieść z powierzchni Ziemi ciało o masie 3000000 kg (rakieta Saturn) na wysokość 10 metrów.

Pracę w fizyce liczymy z następującego wzoru: $W = \int_a^b F(x)\, dx$

Na wysokości x nad powierzchnią ziemi siła przyciągania wynosi: $F(x) = G\dfrac{M \cdot m}{(R+x)^2}$,

gdzie G - stała grawitacji, M - masa Ziemi, m - masa rakiety, R - promień Ziemi.

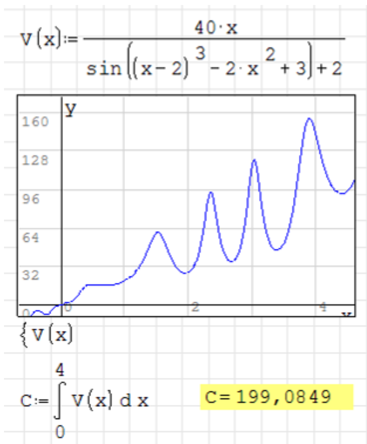
Ponieważ w programie SMathStudio mamy problemy z całkowaniem w jednostkach, dlatego wartości wszystkich stałych zamieniamy na układ SI. Wtedy pracę otrzymujemy w dżulach [J] – i możemy całkować bez używania jednostek.



ĆWICZENIE 10 - **droga pojazdu**

Samochód poruszał się z zmienną prędkością, którą opisuje następujący wzór: $V(x) = \dfrac{40x}{\sin\left((x-2)^3 - 2x^2 + 3\right) + 2}$, gdzie x oznacza czas. Jaką drogę przejechał ten samochód w czasie 4 pierwszych godzin?

Drogę w fizyce liczymy z ogólnego wzoru: $L = \int_{x_1}^{x_2} V(x)\, dx$, gdzie x oznacza czas ruchu pojazdu.



ZADANIA

Zadanie 1

Masz dane dwie funkcje kwadratowe

$$f(x) = -2x^2 + 3 \cdot x + 1$$

$$y(x) = x^2 - \frac{1}{2} \cdot x + 1{,}5 \cdot N$$

Znajdź miejsca zerowe, punkty wspólne i ekstremalne dla obu funkcji

Wylicz pola powierzchni pod wykresami i pole powierzchni części wspólnej

Wylicz długości krzywych pomiędzy miejscami zerowymi i punktami wspólnymi

Narysuj wykres i umieść na nim obie krzywe oraz charakterystyczne punkty

Zadanie 2

Sprawdź za pomocą całkowania numerycznego prawdziwość podstawowych wzorów geometrii na płaszczyźnie (pole i długość brzegu dla: kwadratu, trójkąta, koła, trapezu.

UWAGA - wyznacz równania prostych (krzywych), które ograniczają te figury.