Szacowanie niepewności w pomiarach laboratoryjnych

Pomiar

Aby coś zmierzyć musimy wiedzieć, **co chcemy zmierzyć** (np. długość, masę, czas, itp.) oraz musimy dysponować odpowiednim **przyrządem** (np. linijką, stoperem, wagą, itp.). Sam pomiar polega na porównaniu mierzonej wielkości (np. długości stołu) z przyrządem, w wyniku czego uzyskujemy **wynik pomiaru**, tj. liczbę z jednostką (np. 1522 mm).

Zapis wyniku pomiaru

Otrzymany wynik pomiaru nie jest jednak pełną informacją o mierzonej wielkości. W praktyce bardzo potrzebna jest również **ocena wiarygodności** pomiaru, polegająca na określeniu (oszacowaniu) **niepewności pomiarowej** wyniku. W praktyce stosuje się pojęcie **niepewności standardowej**, w języku potocznym mówimy raczej o **błędzie** pomiarowym. Sam wynik pomiaru zapisujemy w razem z niepewnością w tej samej jednostce, np. 1522 ± 1 mm, 1,006 ± 0,003s, itp. W niepewności pomiarowej podajemy tylko tyle cyfr znaczących, ile miał ich wynik główny pomiaru!

Ocena niepewności pomiarowej

Jeżeli mamy do czynienia z **pojedynczym pomiarem**, pomierzonym za pomocą określonego przyrządu - nie ma problemu. Niepewnością będzie zazwyczaj najmniejszą działką na przyrządzie (np. 1 mm na linijce, 0,1 sekunda na stoperze, itp.). Jeżeli mamy do czynienia w pomiarem wielokrotnym (np. mierzymy grubość drutu w różnych miejscach), to **średnia arytmetyczna** jest bardzo dobrym oszacowaniem pomiaru, a niepewność (błąd) obliczamy z wzoru na **niepewność standardową**, znanego z obliczeń statystycznych $S = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$.

Ponieważ wielokrotnie dokonywane pomiary podlegają pod procesy statystyczne, dlatego też opisuje je krzywa Gaussa dana wzorem: $G(x) = \frac{1}{s \cdot \sqrt{2\pi}} \exp - \frac{(x-\bar{x})^2}{2s^2}$ - jeżeli rozkład pomiarów ma kształt krzywej dzwonowej możemy być pewni, że pomiary oddają rzeczywisty charakter mierzonej wielkości.

Obliczanie niepewności na podstawie pomiarów pośrednich

Bardzo często mamy do czynienia z następującą sytuacją: mierzymy pewne wielkości obarczone różnymi błędami, i na podstawie określonego **wzoru** (chemicznego, fizycznego) wyliczamy dopiero końcowy wynik. Jak w takim wypadku wyliczyć niepewność pomiarową?

Najczęściej stosuje się wzór wyrażający w literaturze **prawo przenoszenia odchyłek przypadkowych**. Załóżmy, że obliczamy prędkość - *V* mierząc czas - *t* i odległość - *s*. Czas i odległość mają wyliczone średnie ($t_{śr}$ i $s_{śr}$) oraz wyliczone niepewności pomiarowe - odchylenie standardowe ($S(t)$ i $S(s)$).

W takim wypadku niepewność prędkości wyliczamy z wzoru:

$$S(V) = \sqrt{\left(\frac{d}{dt}V(t_{sr})\right)^2 \cdot S(t)^2 + \left(\frac{d}{ds}V(s_{sr})\right)^2 \cdot S(s)^2} \, .$$

We wzorze mamy do czynienia z pochodnymi. Na szczęście nie musimy ich wyliczać algebraicznie - odpowiednie programy robią to same. Spotkać można też dużo prostsze rozwiązanie (bez wyliczania pochodnych:

$$S(V) = V_{śr}\sqrt{\left(\frac{S(t)}{t_{sr}}\right)^2 + \left(\frac{S(s)}{s_{sr}}\right)^2}$$

ĆWICZENIE 1 – **rzut kostkami**

Rzucamy pięcioma kostkami i sumujemy liczbę oczek na wszystkich pięciu kostkach. Zasymuluj w programie 500 rzutów. Wykreśl punkty i krzywą Gaussa.

Wynik sumowania może wahać się pomiędzy 5 a 30 oczek.

1) Zasymulujemy rzuty pięcioma kostkami.
2) Wyliczymy sumy oczek poszczególnych rzutów.
3) Policzymy ile razy wyrzucono poszczególne sumy oczek.
4) Utworzymy wykres z ilościami poszczególnych sum oczek.
5) Utworzymy wykres krzywej Gaussa na podstawie sumy wyrzuconych oczek.

Jeżeli suma wyrzuconych oczek podlega opisowi statystycznemu, utworzony wykres powinien pokrywać się z krzywą Gaussa. Poniżej przedstawiono rozwiązanie. W żółtych polach fragmenty tabel.

```
DEFINICJE
ILE := 1000                      tutaj można wpisać liczbę rzutów
M := matrix(ILE ; 5)             5 kolumn ILE wierszy

RZUTY KOSTKAMI - LOSOWANIE - TABLICA M
for i ∈ 1..ILE                   losowanie liczb od 1 do 6
  | M i 1 := random(6)+1
  | M i 2 := random(6)+1
  | M i 3 := random(6)+1
  | M i 4 := random(6)+1
  | M i 5 := random(6)+1

SUMOWANIE OCZEK - TABLICA S
for i ∈ 1..ILE
  S i := M i 1 + M i 2 + M i 3 + M i 4 + M i 5

ILE RAZY WYRZUCONA DANA SUMA - TABLICA R
R := matrix(1 ; 30)              tablica pozioma - lepiej widać

for i ∈ 1..ILE                   zwiększamy o 1
  | s := S i                     komórkę zawierającą sumę
  | R 1 s := R 1 s + 1
R = (0 0 0 0 0 0 2 4 10 18 23 40 54 61 79 86 108 104 113 95 63 49 28 30 16 8 5 4 0 0)
pierwsze cztery pola zawsze zerowe - nie można wyrzucić takiej sumy oczek pięcioma kostkami

PUNKTY NA WYKRESIE - TABLICA P

P := matrix(30 ; 5)
for i ∈ 5..30
  | P i 1 := i
  | P i 2 := R 1 i
  | P i 3 := "."
  | P i 4 := 10
  | P i 5 := "red"

WYKRES
```

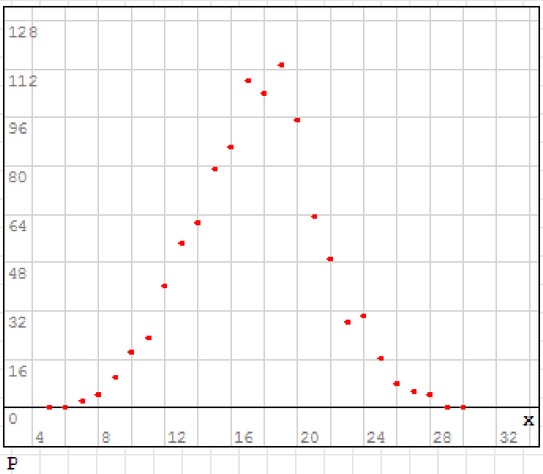


tabela M (fragment)

2	5	1	3	5
2	6	5	1	1
2	6	4	3	1
1	3	4	1	1
6	4	6	2	6
6	6	2	5	5
3	4	1	4	5
4	5	2	4	3
5	3	6	4	3
3	1	3	1	2
2	6	1	5	4
4	6	5	4	6

tabela S (fragment)

16
15
16
10
24
24
17
18
21
10

tabela P (fragment)

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
5	0	"."	10	"red"
6	0	"."	10	"red"
7	2	"."	10	"red"
8	4	"."	10	"red"
9	10	"."	10	"red"
10	18	"."	10	"red"
11	23	"."	10	"red"
12	40	"."	10	"red"
13	54	"."	10	"red"
14	61	"."	10	"red"

Zamiast sumy punktów na wykresie można wyliczyć prawdopodobieństwo wystąpienia takiej sumy w całym zbiorze – jest to bardziej uniwersalna miara rozkładu normalnego Gaussa.
Poniżej obliczono prawdopodobieństwo w tablicy PR oraz wyznaczono punkty do wykresu w tablicy P1, a także wyliczono teoretyczny rozkład z wzory Gaussa na podstawie oryginalnych sum z tablicy S.

Bardziej uniwersalną miarą rozkładu jest prawdopodobieństwo wyrzucenia odpowiedniej ilości oczek

PRAWDOPODOBIEŃSTWO WYRZUCENIA SUMY OCZEK- TABLICA PR

for $i \in 5..30$

$$PR_i := \frac{R_{1\,i}}{ILE}$$

Prawdopodobieństwo to iloraz ilości wyrzuconych sum oczek do wszystkich pomiarów

PUNKTY NA WYKRESIE - TABLICA P1

$P1 := \mathrm{matrix}(30;5)$

tablica składająca się z pięciu kolumn (X,Y,znak,wielkość,kolor)

for $i \in 5..30$

$P1_{i\,1} := i$

$P1_{i\,2} := PR_i$

$P1_{i\,3} := "."$

$P1_{i\,4} := 10$

$P1_{i\,5} := "red"$

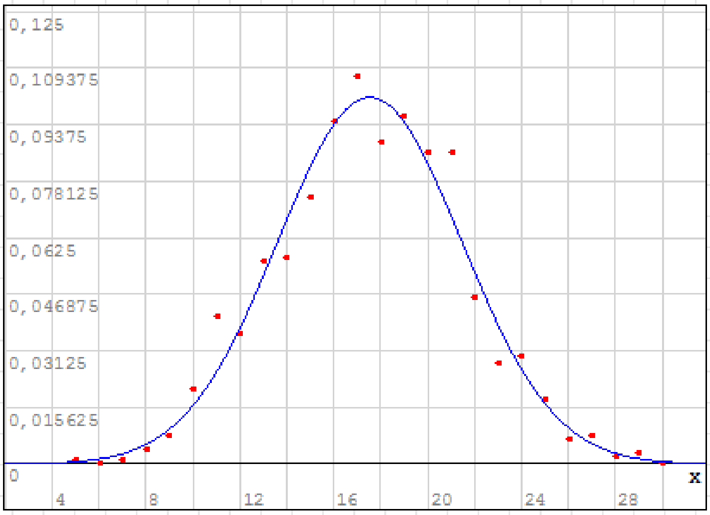
KRZYWA GAUSSA - TEORETYCZNA

Parametry do krzywej Gaussa (średnią i odchylenie) tworzymy na podstawie oryginalnych pomiarów w tabeli S

$$SR := \frac{\sum_{i=1}^{ILE} S_i}{ILE} \qquad OD := \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{ILE} \left[\left(S_i - SR\right)^2\right]}{ILE-1}}$$

$SR = 17{,}503$ $\qquad OD = 3{,}9359$

$$G(x) := \frac{1}{OD\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\exp\left[-\frac{(x-SR)^2}{2\cdot OD^2}\right]$$



G(x)
P1

PR =

0
0
0
0
0,001
0
0,001
0,004
0,008
0,021
0,041
0,036
0,056
0,057
0,074
0,095
0,107
0,089
0,096

P1 =

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
5	0,001	"."	10	"red"
6	0	"."	10	"red"
7	0,001	"."	10	"red"
8	0,004	"."	10	"red"
9	0,008	"."	10	"red"
10	0,021	"."	10	"red"
11	0,041	"."	10	"red"
12	0,036	"."	10	"red"
13	0,056	"."	10	"red"
14	0,057	"."	10	"red"
15	0,074	"."	10	"red"
16	0,095	"."	10	"red"
17	0,107	"."	10	"red"
18	0,089	"."	10	"red"
19	0,096	"."	10	"red"

ĆWICZENIE 2 – **wahadło matematyczne**

Przyspieszenia ziemskiego nie można zmierzyć – nie ma takiego przyrządu! Ale można je wyliczyć z wzoru w których występuje g i inne (mierzalne) wielkości. Wahadło matematyczne, to kulka zawieszona na nici. Wystarczy zmierzyć okres wahadła T oraz długość nici L i skorzystać ze znanego z fizyki wzoru.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Podczas opracowywania wyników eksperymentów naukowych ważne jest nie tylko otrzymanie poszukiwanej wielkości, ale także oszacowanie wielkości popełnionego błędu. Mierzymy czas stoperem i długość linijką, więc możemy pomylić się o ±1 sekundę lub o ±1 milimetr.

A jaki błąd będzie miało przyspieszenie ziemskie? Sposobów wyliczenia tego błędu jest kilka. Możemy policzyć 10 razy przyspieszenie ziemskie na podstawie danych z tabel, a potem odchylenie. Najbardziej znane jest jednak prawo przenoszenia niepewności, które w praktyce opiera się na policzeniu średniej geometrycznej. W praktyce szkolnej stosujemy wzór (1), w obliczeniach inżynierskich wzór (2) z zastosowaniem pochodnych.

$$(1)\quad \Delta g_{śr} = g_{śr}\sqrt{\left(\frac{\Delta L}{L_{sr}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta T}{T_{śr}}\right)^2}$$

$$(2)\quad \Delta g_{śr} = \sqrt{\left(\frac{d}{dT}g(T)\right)^2\cdot\Delta T^2 + \left(\frac{d}{dL}g(L)\right)^2\cdot\Delta L^2}$$

Gotowy wynik na przyspieszenie wraz z obliczonym błędem zapisujemy zaś w postaci: $g = g_{śr} \pm \Delta g_{śr}$ (np. 9,805±0,021 m/s^2).

W tabelach znajdują się pomierzone czasy 10 wahnięć T10 oraz długość wahadła L. Należy policzyć przyspieszenie ziemskie oraz wyliczyć błąd pomiaru trzema metodami.

Tabele zawierają po 10 POMIARÓW
czasu 10 wahnięć TT10
i długości wahadła LL

$$TT10 := \begin{pmatrix} 19,9 \\ 20,0 \\ 20,1 \\ 20,1 \\ 19,9 \\ 19,9 \\ 20,0 \\ 19,8 \\ 19,9 \\ 20,1 \end{pmatrix} \qquad LL := \begin{pmatrix} 1,00 \\ 1,01 \\ 1,00 \\ 0,99 \\ 0,99 \\ 0,99 \\ 1,01 \\ 1,01 \\ 1,00 \\ 0,99 \end{pmatrix}$$

OKRES WAHADŁA to czas 1 wahnięcia

$$TT := \frac{TT10}{10} \qquad TT = \begin{pmatrix} 1,99 \\ 2 \\ 2,01 \\ 2,01 \\ 1,99 \\ 1,99 \\ 2 \\ 1,98 \\ 1,99 \\ 2,01 \end{pmatrix}$$

ŚREDNIE i ODCHYLENIA STANDARDOWE
okresu i długości

$$Tś := \frac{\sum TT}{10} \qquad Lś := \frac{\sum LL}{10}$$

$$Tś = 1,997 \qquad Lś = 0,999$$

$$\Delta T := \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} \left[\left(TT_i - Tś \right)^2 \right]}{10}} \qquad \Delta L := \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} \left[\left(LL_i - Lś \right)^2 \right]}{10}}$$

$$\Delta T = 0,01 \qquad \Delta L = 0,0083$$

PRZYSPIESZENIE ZIEMSKIE
wyliczamy z wzoru na okres
Po przekształceniu przyjmie postać funkcji
g (T,L) z dwoma parametrami

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$g(T ; L) := 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{L}{T^2} \qquad gś := g(Tś ; Lś) \qquad gś = 9,8894$$

lub podstawiając bezpośrednio do wzoru

$$gś1 := 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{Lś}{Tś^2} \qquad gś1 = 9,8894$$

BŁĄD POMIARU - średnia z przyspieszeń
jako parametr funkcji wstawiamy tablice

$$GG := g(TT ; LL) \qquad Gś := \frac{\sum GG}{10} \qquad Gś = 0,9889$$

$$GG = \begin{pmatrix} 0,9899 \\ 0,9998 \\ 0,9899 \\ 0,98 \\ 0,98 \\ 0,98 \\ 0,9998 \\ 0,9998 \\ 0,9899 \\ 0,98 \end{pmatrix}$$

$$\Delta G := \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} \left[\left(GG_i - Gś \right)^2 \right]}{10}} \qquad \Delta G = 0,0082$$

BŁĄD POMIARU za pomocą prawa
przenoszenia błędów
METODA SZKOLNA - uproszczona

$$\Delta g_{śr} = g_{śr} \sqrt{\left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2 + \left(\frac{\Delta T}{T_{śr}} \right)^2}$$

$$\Delta g := gś \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta L}{Lś} \right)^2 + \left(\frac{\Delta T}{Tś} \right)^2} \qquad \Delta g = 0,0961$$

BŁĄD POMIARU
METODA INŻYNIERSKA
pochodne

$$\Delta g_{śr} = \sqrt{\left(\frac{d}{dT} g(T) \right)^2 \cdot \Delta T^2 + \left(\frac{d}{dL} g(L) \right)^2 \cdot \Delta L^2}$$

trzeba pamiętać, aby nazwy zmiennych w funkcjach nie były takie same jak nazwy tablic

pochodne P1 i P2 z parametrami, aby wygodniej wstawiać liczby w równaniu

$$P1(T ; L) := \frac{d}{dT} g(T ; L) \qquad P2(T ; L) := \frac{d}{dL} g(T ; L)$$

$$P1(T ; L) = -\frac{8 \cdot L \cdot \pi^2}{T^3} \qquad P2(T ; L) = \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2}$$

$$\Delta G := \sqrt{P1(Tś ; Lś)^2 \cdot \Delta T^2 + P2(Tś ; Lś)^2 \cdot \Delta L^2} \qquad \Delta G = 0,1291$$

Jak wynika z obliczeń, im „poważniejszy” stosujemy sposób obliczania błędy, tym ten błąd wychodzi większy!
Wynik (obliczone przyspieszenie ziemskie) z największym błędem wynosi: $\boldsymbol{g = 9,8894 \pm 0,1291 m/s^2}$